



دانشگاه علمی فناوری و صنعت شاهرود

نشریه پژوهش‌های حفاظت آب و خاک

جلد بیست و پنجم، شماره سوم، ۱۳۹۷

<http://jwsc.gau.ac.ir>

DOI: 10.22069/jwsc.2018.14532.2936

## حل عددی پدیده ضربه قوچ با استفاده از روش عددی بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش

بنفشه نوروزی<sup>۱</sup>، احمد احمدی<sup>۲</sup>، \*محسن لشکر بلوک<sup>۳</sup> و محمود نوروزی<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری گروه مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، آدانشیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود،

<sup>۲</sup>استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه گلستان، <sup>۳</sup>آدانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

تاریخ دریافت: ۹۶/۱۰/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۹۷/۲/۱۹

### چکیده

**سابقه و هدف:** یکی از پدیده‌هایی که در شبکه لوله‌ها باعث ایجاد خسارت و کاهش عمر مفید تاسیسات آبی می‌شود، پدیده ضربه قوچ یا چکش آبی است. روش مرسوم برای مدل‌سازی معادلات دیفرانسیلی که این پدیده را تشریح می‌کند، روش خطوط مشخصه است. به‌طور کل، در روش‌های معمول به خوبی توسعه‌یافته اجزای محدود، احجام محدود و تفاضل‌های محدود، گسسته‌سازی حوزه مکانی مساله با استفاده از ابزاری به نام شبکه‌بندی صورت می‌گیرد: با وجود استفاده مفید از این روش‌ها در بسیاری از زمینه‌های علمی، شبکه‌بندی، فرایندی پرهزینه و دردسرساز، به‌ویژه در مسائلی با مرزهای پیچیده است. همین امر انگیزه اصلی ابداع روش‌های بدون شبکه بوده است. در این‌گونه روش‌ها حوزه مکانی مساله توسط تعدادی نقطه به سادگی گسسته‌سازی می‌شود.

**مواد و روش‌ها:** در پژوهش حاضر، جهت مدل‌سازی ضربه قوچ کلاسیک در سیستمی شامل شیر، لوله و مخزن، از روش عددی بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش استفاده می‌شود. در رهیافت ارائه شده، از روش ضمنی کرنک نیکلسون برای گسسته‌سازی زمانی استفاده شده تا بتوان شرط کوچک‌تر بودن گام زمانی را برای پایداری حل از بین برد. در این روش، معادلات پیوستگی و مومنتوم جهت محاسبه مقادیر سرعت و فشار در صفحه  $x-t$  با استفاده از داده‌های گام زمانی قبلی، به‌طور هم‌زمان محاسبه می‌شود. رهیافت ارائه شده کاملاً ماتریسی بوده و فرایند حل، شامل چند عملیات جبری ساده می‌باشد که بر روی ماتریس‌های تنک صورت می‌گیرد.

**یافته‌ها:** در مقاله حاضر، ابتدا معادلات حاکم بر ضربه قوچ نوشته شده و سپس، کلیات روش عددی بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش به‌طور کامل، تشریح شده است. در ادامه، چندین آزمایش معتبر در مورد ضربه قوچ با روش فوق، مدل‌سازی شده و در انتها نیز یک مساله با به‌کارگیری روش کرنک-نیکلسون در حالات مختلف، تحلیل گردیده است. نتایج حاصل از مدل‌سازی مسائل با نتایج سایر روش‌های عددی معتبر مانند روش MOC و روش عددی به‌کار رفته توسط "زیلک" در نقاط بحرانی لوله مانند پشت شیر و وسط لوله مورد برآزش قرار گرفته است. همچنین، تحلیل هیدرولیکی مسائل و نحوه محاسبه جواب‌های دقیق، به‌طور کامل، تشریح گردیده است. در نهایت، پس از به‌کارگیری معیار مجموع مربعات خطا و تخمین خطایی کم‌تر از ۵ درصد در کل بازه مورد بررسی، مشخص

\* مسئول مکاتبه: [mlbolok@iust.ac.ir](mailto:mlbolok@iust.ac.ir)

گردید که از این روش، می‌توان به‌عنوان یکی از روش‌های عددی دقیق، ساده و کم‌هزینه در مدلسازی مسایل ضربه قوچ استفاده نمود.

**نتیجه‌گیری:** عدم نیاز به انتگرال‌گیری، عملیات ریاضی کاملاً ماتریسی و نیز بدون شبکه بودن فضای مسأله از ویژگی‌های مهم روش عددی بدون شبکه است که علاوه بر کاهش منابع خطا می‌تواند یکی از دقیق‌ترین روش‌های حل عددی پدیده ضربه قوچ در سیستم لوله‌ها به‌شمار آید.

**واژه‌های کلیدی:** روش عددی بدون شبکه، شبکه لوله‌ها، ضربه قوچ

### مقدمه

ضربه قوچ یکی از پدیده‌های مخرب هیدرودینامیکی است که در گروه جریان‌های میرای غیرماندگار طبقه‌بندی می‌شود و در اکثر ایستگاه‌های پمپاژ، خطوط انتقال آب و نیروگاه‌های برق آبی ایجاد می‌شود. وقوع این پدیده باعث ایجاد فشار غیرعادی، بروز پدیده کاویتاسیون و در نهایت ترکیدن لوله‌ها و خرابی همه سیستم می‌شود. بررسی دقیق این پدیده پیش از طراحی سازه‌های آبی نقش مهمی در پیشگیری از وقوع آن و از طرفی افزایش عمر مفید این سازه‌ها دارد. اولین ایده استفاده از روش‌های بدون شبکه در روش هیدرودینامیک ذرات هموار توسع گینگولد و مونگا (۱۹۷۷) به‌منظور مدلسازی پدیده‌های نجومی هم‌چون گسترش ستارگان و توده ابرهای غباری به‌کار گرفته شد (۱۲). لیو و همکاران (۱۹۹۵) با اصلاح تابع وزن، شرایط سازگاری را برای روش هیدرودینامیک ذرات هموار تامین نموده و روش باز تولید ذرات کرنال را ارائه دادند (۱۴). دیلتیس (۱۹۹۹) از روش حداقل مربعات متحرک برای تولید توابع شکل در روش هیدرودینامیک هموار استفاده کرد و روشی با نام MLSPH را ارائه نمود (۱۰). پس از فعالیت‌های تحقیقاتی نیرولز و همکاران (۱۹۹۲) در به‌کارگیری روش بدون شبکه جزء پخش در مکانیک جامدات روند رشد روش‌های بدون شبکه سرعت گرفت (۱۸). روش‌های زیادی به‌نام روش‌های بدون

شبکه مانند روش بدون شبکه گالرکین (۶) توسط بلیتسکو (۱۹۹۴) روش هم‌مکانی نقطه‌ای (۱۹) توسط اونات و همکاران (۱۹۹۶) روش اجزای محدود افراز واحد (۵) توسط بابوسکا (۱۹۹۵) روش ابرهای اچ پی (۱۱) توسط دورات و ادن (۱۹۹۶) روش بدون شبکه محلی پترو گالرکین (۴) توسط آتلوری (۱۹۹۸) و روش حداقل مربعات گسسته (۳) توسط ارزانی و افشار (۲۰۰۶) ارائه شده‌اند. در مراجع (۶) و (۱۶) مرور کاملی بر روش‌های بدون شبکه و سیر تکاملی آن‌ها شده است. در راستای بهبود دقت روش حداقل مربعات گسسته، افشار و لشکر بلوک (۲۰۰۸) از نقاط همپوش به همراه فرآیند حداقل مربعات استفاده کرده و روش حداقل مربعات گسسته همپوش را ارائه دادند (۱). بدین ترتیب با استفاده از نقاط همپوش، حل مسأله با دقت بالاتری صورت می‌گرفت، بدون آن‌که هزینه محاسباتی چندان افزایش یابد. افشار و همکاران (۲۰۱۲) از روش حداقل مربعات گسسته همپوش در حل مسائل الاستیک صفحه‌ای نیز استفاده کردند آن‌ها همچنین یک فرآیند غنی‌سازی چندمرحله‌ای نقاط را با استفاده از دیاگرام‌های ورونتی ارائه دادند (۲). پژوهش‌ها در زمینه روش‌های بدون شبکه همین‌طور در روش حداقل مربعات گسسته همپوش هم‌چنان ادامه دارد و کاربردهای متعددی از آن برای آینده متصور است.

در نمودار  $x-t$  می‌توانست جهت محاسبه جواب موضعی بدون این‌که به وضوح از جواب‌های قبلی ذخیره شده استفاده شود، انتخاب گردد. محاسبات او بر روی مسیر امواج چرخشی برگشتی با یک برگشت خیلی ساده پی‌ریزی شده بود. در مطالعه او، جواب‌های دقیق برای یک ضربه قوچ بدون اصطکاک به دست آورده شدند و نتایج حاصل از الگوریتم جدید ارائه شده با محاسبات ضربه قوچ متداول مقایسه شدند (۲۲). شاملو و همکاران (۲۰۱۵) در مطالعه‌ای به بررسی یک‌بعدی جریان‌های انتقالی در لوله‌ها با در نظر گرفتن اثرات اصطکاک غیردائمی پرداختند (۲۱). آن‌ها در این مقاله یک مدل شبه‌دائمی و  $\epsilon$  مدل اصطکاک غیردائمی را برای جریان لوله‌ای انتقالی ارائه دادند و نتایج آزمایشگاهی به دست آمده را با مدل اصطکاک شبه‌دو بعدی توسط زیلک (۱۹۶۸) و واردی و براون (۲۰۰۳) برای ضربه قوچ با اعداد رینولدز در حالات جریان مختلف آرام، آشفته و انتقالی مورد مقایسه قرار دادند و نشان دادند که مدل زیلک با نتایج آزمایشگاهی به دست آمده برازش مناسب‌تری نمایش می‌دهد. حالات خاص رخداد پدیده ضربه قوچ نیز در مطالعات اخیر مورد توجه قرار گرفته است. مطالعات وهبا (۲۰۰۶، ۲۰۰۸ و ۲۰۱۳) در زمینه برقراری سیال غیرنیوتنی در لوله در این حالت (۲۳-۲۵)، مدل‌سازی‌های انجام شده توسط کربار و همکاران (۲۰۱۴) در مورد تحلیل شبه‌دو بعدی ضربه قوچ (۱۴)، مطالعات آزمایشگاهی و عددی برگانت و همکاران (۲۰۱۱) در رابطه با مسائل اندرکنش سیال-سازه در حین ضربه قوچ در حالات مختلف با جنس لوله‌های متفاوت (۷)، مطالعات صورت گرفته توسط زنگانه و همکاران (۲۰۱۴) در زمینه بررسی اثر تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک در کاهش خسارات ضربه قوچ (۲۷) و ... نمونه‌هایی از این مطالعات به‌شمار می‌روند که نشان می‌دهند به‌کارگیری روش‌های عددی مختلف در

به‌طور کل، در خلال ربع اول قرن بیستم، بیش‌تر مطالعات انجام‌شده در زمینه ضربه قوچ، در قاره اروپا بوده است و بیش‌تر مفاهیمی که مورد بررسی قرار گرفت، مربوط به مبحث سرج است که توسط جکفسکی (۱۸۷۸) منتشر شده است. همچنین او قانون محاسبه مقدار فشار در اثر بستن آنی شیر را برای سیستم ساده شیر، لوله و مخزن به‌دست آورد. این قانون، بیان می‌دارد که میزان افزایش فشار در اثر بستن آنی شیر از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\Delta H = \frac{cV_0}{g} \quad (1)$$

که در آن،  $c$  سرعت انتشار موج صوت در سیال  $(m/s)$ ،  $V_0$  سرعت اولیه سیال در لوله  $(m/s)$  و  $g$  شتاب جاذبه زمین  $(m/s^2)$  می‌باشد. واحدها در سیستم بین‌المللی  $SI$  ذکر شده‌اند. بر این اساس، تاکنون، مطالعات مختلفی با استفاده از روش‌های عددی گوناگون، پدیده ضربه قوچ را مورد بررسی قرار داده‌اند. سایکیا و سارما (۲۰۰۶) جریان‌های انتقالی ناشی از ضربه قوچ را با در نظر گرفتن ضریب اصطکاک غیردائمی با روش عددی مشخصه مدل‌سازی نمودند و نتیجه گرفتند که تأثیر به‌کارگیری ضریب اصطکاک متغیر، در مدل‌های عددی حاضر، در تضاد با تأثیر اصطکاک در حالت دائمی می‌باشد. میرایی موج فشاری پس از قطع ناگهانی جریان با گذشت زمان در نقاط مختلف لوله توسط مدل آن‌ها معروف به UNSTD\_FRIC\_WH<sup>۱</sup> نمایش داده شد که برای همه شرایط جریان، از آرام تا آشفته قابل کاربرد می‌باشد (۲۰). تایلینگ (۲۰۰۷) روشی متفاوت را در محاسبات ضربه قوچ به‌کار برد. روش او بر مبنای روش مشخصه پی‌ریزی شده بود با این تفاوت که در محاسبات او به یک شبکه عددی نیاز نبود و هر نقطه

تحلیل زوایای مختلف این پدیده همواره مورد توجه پژوهشگران بوده و مطالعات در این زمینه همچنان ادامه دارد.

با توجه به لزوم بررسی دقیق پدیده ضربه قوچ پیش از طراحی سازه‌ها، روش‌های عددی مختلفی برای مدلسازی دقیق این فرآیند، به کار گرفته شده که عمدتاً دارای خطاها و هزینه‌های محاسباتی بالا می‌باشند. در این میان، روش‌های عددی خطوط مشخصه، اجزای محدود و تفاضلات محدود از پیشینه بیش‌تری برخوردارند که هر یک مزایا و محدودیت‌هایی نیز دارند. در تمامی روش‌های عددی، محیط پیوستار مسأله باید توسط ابزاری گسسته‌سازی شده تا توابع مجهول پس از طی فرآیند حل محاسبه شوند. در روش‌های معمول به خوبی توسعه یافته اجزای محدود، احجام محدود، تفاضلات محدود، گسسته‌سازی حوزه مکانی مسأله با استفاده از ابزاری به نام شبکه‌بندی صورت می‌گیرد. با وجود استفاده مفید از این روش‌ها در بسیاری از زمینه‌های علمی، شبکه‌بندی، فرایندی پرهزینه و دردسرساز، به‌ویژه در مسائلی با مرزهای پیچیده یا متحرک است. همین امر، انگیزه اصلی ابداع روش‌های بدون شبکه بوده است. در این‌گونه روش‌ها حوزه مکانی مسأله توسط تعدادی نقطه به سادگی گسسته‌سازی می‌شود. این روش‌ها را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم‌بندی کرد. دسته اول، گروهی هستند که از فرم اصلی معادلات دیفرانسیلی در گسسته‌سازی استفاده می‌کنند، دسته دوم گروهی هستند که از انتگرال‌گیری برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیلی بهره می‌برند. مزیت گروه اول، سادگی و عدم نیاز به محاسبه عددی انتگرال در آن‌ها است مانند روش حداقل مربعات گسسته. ولی به دلیل آن‌که در این روش‌ها مشتقات هم‌مرتب مشتقات موجود در معادله دیفرانسیلی باید تقریب‌زده شوند، معمولاً از

دقت پایینی برخوردارند. در عوض در روش‌های گروه دوم، مرتبه مشتقاتی که باید تقریب‌زده شوند، یک مرتبه کم‌تر از مرتبه مشتقات موجود در معادله دیفرانسیلی خواهد بود. ولی در این روش‌ها انتگرال‌گیری مستلزم تولید شبکه‌ای مجزا برای محاسبه عددی آن است. همین امر باعث می‌شود این روش‌ها کاملاً بدون شبکه محسوب نگردند. در راستای بهبود یکی از روش‌های گروه اول به نام حداقل مربعات گسسته، از نقاطی به نام نقاط همپوش<sup>۱</sup> به همراه فرآیند حداقل مربعات استفاده شده و روش حداقل مربعات گسسته همپوش<sup>۲</sup> ارائه شده است. بدین ترتیب با استفاده از نقاط همپوش، حل مسأله با دقت بالاتری صورت می‌گیرد، بدون آن‌که هزینه محاسباتی چندان افزایش یابد (۱۵). در پژوهش حاضر، روش عددی بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش در تحلیل این پدیده به کار گرفته شده است که کاملاً بدون شبکه بوده و بدون نیاز به انتگرال‌گیری، ماتریس‌هایی مثبت تولید می‌کند که شرایط را برای حل مؤثر تکراری فراهم می‌سازد. در این روش، گسسته‌سازی حوزه مکانی تنها با استفاده از یک سری نقاط پراکنده صورت می‌گیرد که همین امر باعث کاهش هزینه‌های گسسته‌سازی در مسائلی با مرزهای پیچیده می‌شود. در ادامه، پس از تشریح کلیات روش عددی بدون شبکه، معادلات حاکم بر ضربه قوچ نوشته شده و چندین آزمایش معتبر در مورد ضربه قوچ در قالب مسأله با روش فوق، مدلسازی شده و نتایج حاصله با جواب‌های دقیق و نیز با جواب‌های سایر روش‌های عددی مورد راستی آزمایی قرار گرفته و در انتها نیز یک مسأله ضربه قوچ پیچیده‌تر با به کارگیری روش کرنک نیکلسون در حالات مختلف تحلیل می‌گردد.

1- Collocation Points

2- Collocated Discrete Least Squares

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f.V|V|}{2D} = 0 \quad (6)$$

که در آن‌ها،  $V$  سرعت متوسط جریان ( $m/s$ )،  $H$  هد متوسط فشار ( $m$ ) و  $f$  ضریب داری و یسباخ می‌باشد. واحدها در سیستم بین‌المللی  $SI$  ذکر شده‌اند. لازم به ذکر است، از عبارات‌های همرفتی سرعت در رابطه‌های ۲ و ۳ به دلیل کوچکی در مقابل سرعت موج صرف‌نظر شده است (۹).

روش عددی بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش: گام اول در حل یک مسأله با محیطی پیوسته با استفاده از هر روش عددی، گسسته‌سازی می‌باشد. در پژوهش حاضر، برای گسسته‌سازی معادلات حاکم از فرمول‌بندی پیشنهاد شده در مرجع (۱۶) بهره گرفته شده که بنا بر آن، در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش در ابتدا حوزه مسأله و مرزهای آن توسط نقاط گرهی گسسته‌سازی می‌شوند. نقاط همپوش نیز به صورت کاملاً دلخواه در حوزه مسأله و در مرزها قرار می‌گیرند. در شکل ۱ یک حوزه فرضی به همراه چیدمان نقاط گرهی و همپوش آورده شده است. باید توجه داشت که در هر نقطه گرهی حتماً یک نقطه همپوش نیز باید قرار گیرد. نقاط همپوش تنها برای محاسبه مقادیر مجهولات مسأله مورد استفاده قرار می‌گیرد و هزینه محاسباتی را چندان افزایش نمی‌دهد.

### مواد و روش‌ها

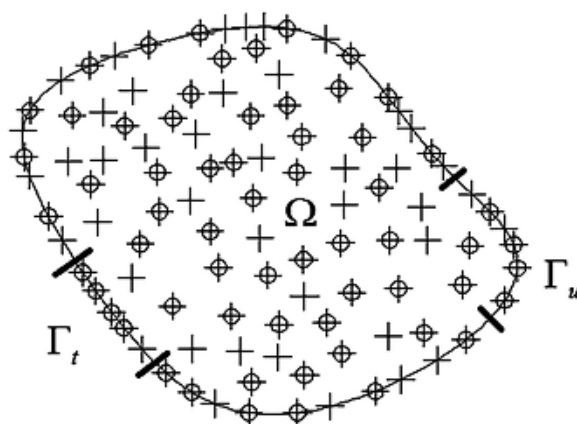
معادلات حاکم: معادلات حاکم جهت تجزیه و تحلیل ضربه قوچ، در حالت کلی، معادلات پیوستگی و مومنتوم است که به صورت زیر می‌باشد (۲۵).

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} \quad (3)$$

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho(1 + \frac{kD}{eE})}} \quad (4)$$

که در آن‌ها،  $H$  هد فشار ( $m$ )،  $t$  زمان ( $s$ )،  $g$  شتاب ثقل ( $m/s^2$ )،  $u$  سرعت محوری ( $m/s$ )،  $v$  سرعت شعاعی ( $m/s$ )،  $r$  راستای شعاعی،  $x$  راستای محوری جریان،  $\tau$  تنش وارد بر جریان ( $pa$ )،  $c$  سرعت موج فشاری ( $m/s$ )،  $\rho$  جرم مخصوص سیال ( $kg/m^3$ )،  $k$  مدول بالک سیال ( $pa$ )،  $D$  قطر لوله ( $m$ )،  $e$  ضخامت لوله ( $m$ ) و  $E$  مدول الاستیک لوله ( $pa$ ) می‌باشند. واحدها در سیستم بین‌المللی  $SI$  ذکر شده‌اند. در محاسبات ضربه قوچ کلاسیک که جریان محوری لوله مدنظر قرار می‌گیرد، سرعت شعاعی صفر می‌باشد. در مورد تنش وارد بر جریان نیز با جایگذاری تنشی معادل تنش جریان پایدار از رابطه شزی در معادله مومنتوم و نیز به‌کارگیری روابط افت فشار داری و یسباخ معادلات حاکم بر جریان به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (۲۲).



شکل ۱- گسسته‌سازی حوزه مسأله توسط نقاط گرهی (O) و نقاط همپوش (+).

Figure 1. Discretization of the problem domain by field nodes (O) and collocation points (+).

$$U(x_j) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \alpha_i R_j(r_{ij}) + B_1 + B_2 x_j + B_3 x_j^2 \quad (8)$$

$$R(r_{ij}) = r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 \quad (9)$$

با علم به این که  $U(x_i) = U_i$  می‌توان  $\bar{n}$  معادله برای محاسبه  $\alpha_i$  به دست آورد. برای محاسبه مجهولات، نیاز به سه رابطه اضافی است که برای به دست آوردن آن‌ها به شکل زیر می‌توان عمل نمود (۱۶):

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} \alpha_i = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} \alpha_i x_i = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} \alpha_i x_i^2 = 0 \quad (12)$$

پس از جایگذاری روابط فوق، به منظور محاسبه تابع شکل، شکل ماتریسی روابط به صورت زیر محاسبه می‌شود:

دامنه مسأله را همانند شکل ۱ در نظر بگیرید، در این شکل، گسسته‌سازی مکانی با استفاده از یک سری نقاط گرهی پراکنده نشان داده شده است. فرض کنید، مقادیر مجهول در نقاط گرهی داده شده‌اند، حال برای محاسبه مقدار تابع مجهول در نقطه‌ای مانند  $x_k$  که الزاماً بر روی نقاط گره‌ای واقع نشده است، می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود (۱۶):

$$U(x_k) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} N_i(x_k) U_i \quad (V)$$

که در آن،  $\bar{n}$  تعداد نقاط گرهی است که در محاسبه مقدار تابع  $u$  در نقطه  $x_k$  به عنوان نقطه مؤثر در نظر گرفته می‌شود.  $N_i(x_k)$  ها توابع شکل هستند که در این روش، با استفاده از توابع درونیابی شعاعی به دست می‌آیند. برای محاسبه تابع شکل، گره  $i$  ام  $N_i(x_k)$  به ترتیب زیر عمل می‌شود. در ابتدا برای هر نقطه گرهی، نقطه‌ای مانند  $x_j$ ، تعداد نقاط مؤثر ( $\bar{n}$ ) تعیین می‌شود، در پژوهش حاضر،  $\bar{n} = 7$  در نظر گرفته می‌شود. حال، مقدار تابع در یک نقطه گرهی که در رابطه ۸ نشان داده شده است، با استفاده از توابع پایه شعاعی (رابطه ۹) به صورت زیر تخمین زده می‌شود.

$$U(x_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i R(r_{ij}) + B_1 + B_2 x_j + B_3 x_j^2 \quad (16)$$

$$U(x_j) = [\alpha] \times [R(r_{11}) \ R(r_{12}) \ R(r_{13}) \ \dots] + [B] \times [1 \ x \ x_j] \quad (16)$$

با جایگزینی مقادیر به دست آمده برای  $[\alpha]$  و  $[B]$  از رابطه ۱۵ مقدار تابع در نقطه گرهی به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$(17)$$

$$U(x_j) = \alpha_1 \times [U][R(r_{11}) \ R(r_{12}) \ R(r_{13}) \ \dots] + \alpha_2 \times [U][1 \ x \ x_j]$$

$$U(x_j) = [U] [\alpha_1 \times [R(r_{11}) \ R(r_{12}) \ R(r_{13}) \ \dots] + \alpha_2 \times [1 \ x \ x_j]]$$

به این ترتیب، پس از محاسبه ماتریس توابع شکل و مشتقات آنها رابطه های ۵ و ۶ به شکل زیر بازنویسی می شوند:

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial V^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\left( \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} \right) + g \frac{\partial H^{n+1}}{\partial x} + f V^{n+1} \frac{|V^n|}{2D} = 0 \quad (19)$$

که در آنها،  $V^{n+1}$  سرعت در گام زمانی بعد  $(m/s)$ ،  $V^n$  سرعت معلوم در زمان حال  $(m/s)$ ،  $H^{n+1}$  هد فشار در گام زمانی بعد  $(m)$ ،  $H^n$  هد فشار معلوم در گام زمانی حاضر  $(m)$ ،  $\Delta t$  بازه زمانی مورد نظر بر حسب  $(s)$  می باشد. واحدها در سیستم بین المللی  $SI$  نوشته شده اند. حال، برای محاسبه ماتریس ضرائب، معادلات بر حسب متغیرهای مجهول در گام زمانی بعد، مرتب می شوند:

$$H^{n+1} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial V^{n+1}}{\partial x} \Delta t = H^n \quad (20)$$

$$V^{n+1} + g \Delta t \frac{\partial H^{n+1}}{\partial x} + f V^{n+1} \frac{|V^n|}{2D} \Delta t = V^n \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} R_1(x_1) & R_2(x_1) & \dots & R_n(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 \\ R_1(x_2) & R_2(x_2) & \dots & R_n(x_2) & 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1(x_n) & R_2(x_n) & \dots & R_n(x_n) & 1 & x_n & x_n^2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(x_1) & R_2(x_1) & \dots & R_n(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 \\ R_1(x_2) & R_2(x_2) & \dots & R_n(x_2) & 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1(x_n) & R_2(x_n) & \dots & R_n(x_n) & 1 & x_n & x_n^2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق که برای محاسبه تابع شکل نوشته شده، مقادیر  $\alpha_i$ ،  $B_i$  و  $R_j(r_{ij})$  مقادیر مجهول تابع در نقطه گرهی می باشند. حال اگر حاصل ماتریس وارون رابطه ۱۳ به  $\omega$  ماتریس به صورت زیر تقسیم گردد، کاملاً مشخص است که ماتریس  $\omega_{22}$  ماتریس صفر می شود:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

بنابراین، با توجه به صفر بودن ماتریس  $\omega_{22}$ ، پس از عملیات ضرب ماتریسی، مقادیر مجهول به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = (\omega_{11}) \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = (\omega_{21}) \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[\alpha] = (\omega_{11}) \times [U], [B] = (\omega_{21}) \times [U]$$

حال، شکل ماتریسی معادله  $U(x_j)$  در رابطه ۸ محاسبه می گردد:

لازم به ذکر است که در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش، گسسته‌سازی معادلات حاکم بر پایه روش باقی‌مانده‌های وزنی می‌باشد که توابع ریاضی و محاسبات مربوط به آن در مرجع (۱) به‌طور کامل، توضیح داده شده است. در ادامه، به‌منظور نشان دادن کارایی روش مزبور چند مسأله آزمایشی ضربه قوچ با روش فوق، مدل‌سازی شده و نتایج حاصله با جواب‌های دقیق و نیز با جواب‌های سایر روش‌های عددی مورد راستی‌آزمایی قرار گرفته است.

### نتایج و بحث

با توجه به اهمیت به‌کارگیری یک روش عددی دقیق در محاسبات هیدرولیکی ضربه قوچ، کارایی روش معرفی شده در این مقاله در قالب چند مثال عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج به‌دست آمده در هر مثال، با نتایج تجربی و نیز نتایج سایر روش‌های عددی مورد راستی‌آزمایی قرار می‌گیرد. در همه مثال‌ها، سیستم رخداده ضربه قوچ، سیستم شیر، لوله و مخزن بوده که نمایی از آن در شکل ۲ نشان داده شده است. شرایط اولیه حاکم بر رخداد این پدیده، مقدار معلوم هد فشاری و سرعت اولیه در ابتدای لوله در  $x=0$  و در مورد شرایط مرزی نیز پس از قطع ناگهانی جریان، میزان سرعت در محل شیر،  $x=L$  برابر با صفر قرار داده می‌شود.

با تعریف رابطه ۲۰ به‌عنوان معادله اول و رابطه ۲۱ عنوان معادله دوم و همچنین، متغیر  $H$  به‌عنوان متغیر اول و متغیر  $V$  به‌عنوان متغیر دوم، ماتریس ضرایب به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Lb_{11} = N \quad (22)$$

$$Lb_{12} = \Delta t \cdot \frac{c^2}{g} \cdot \frac{\partial N}{\partial x} \quad (23)$$

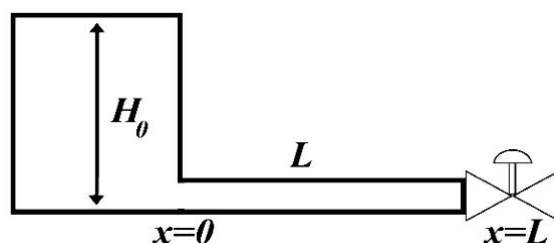
$$Lb_{22} = N(1 + \Delta t \cdot f \cdot \frac{|V|}{2D}) \quad (24)$$

$$Lb_{21} = g \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial N}{\partial x} \quad (25)$$

در ماتریس ضرایب فوق که با  $Lb$  نمایش داده شده، اولین عدد اندیس، نشانگر شماره معادله و دومین عدد، نشانگر شماره متغیر می‌باشد.  $N$  نیز بیانگر تابع شکل می‌باشد. بردار دست راست معادلات نیز با توجه به رابطه‌های ۲۰ و ۲۱ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$RHS_1 = H \quad (26)$$

$$RHS_2 = V \quad (27)$$



شکل ۲- نمایی از سیستم شیر- لوله و مخزن.

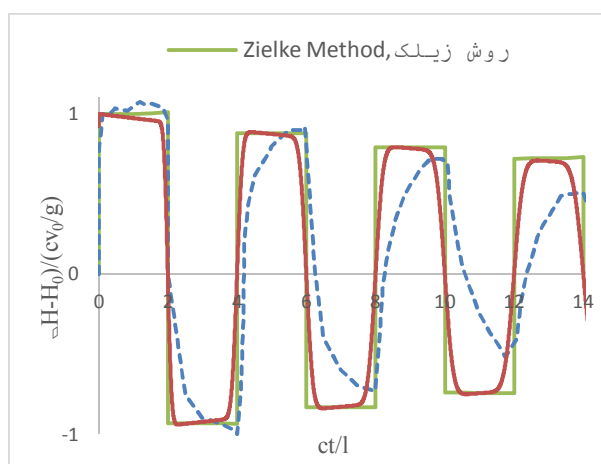
Figure 2. Schematic of the system of valve-pipe and reservoir.



مسئله اول: آزمایش انجام شده توسط هولمبو و رولین (۱۹۶۷) در مرجع (۱۳) را مورد بررسی قرار دهید و نتایج حاصل از روش عددی بدون شبکه را با جوابهای عددی زیلک (۱۹۶۸) در مرجع (۲۸) که در حالت اصطکاک ثابت انجام گرفته، در پشت شیر و نقطه وسط لوله مقایسه نمایید. همچنین، میرایی موج فشاری را با استفاده از روش عددی مزبور در دو نقطه پشت شیر و وسط لوله نمایش دهید. نتایج را در قالب پارامترهای بی بعد زمان

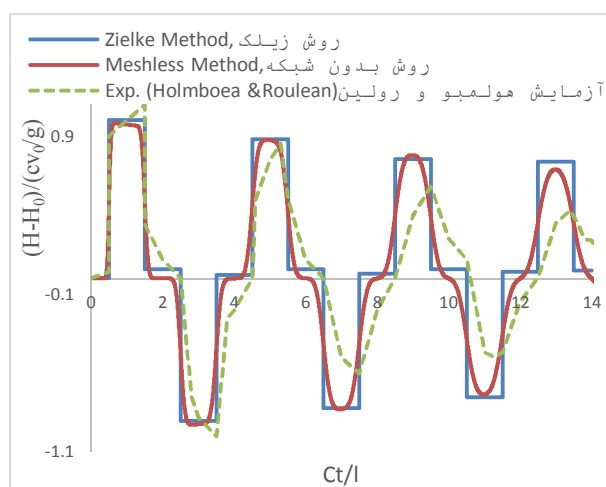
هد فشار  $H^* = \frac{H-H_0}{c v_0 / g}$  روی نمودار، نمایش دهید.

پاسخ: ابتدا ماتریس ضرایب و بردار سمت راست که در بخش قبل، توضیح داده شد، نوشته می شود و سپس با توجه به مشخصات نمونه آزمایشگاهی در شکل های ۳ و ۴ برای حالت پشت شیر و وسط لوله، تغییرات هد فشار محاسبه و با نتایج عددی زیلک و همچنین جوابهای تجربی هولمبو و رولین مورد برازش قرار می گیرد.



شکل ۳- تغییرات زمانی فشار در پشت شیر.

Figure 3. Pressure time history at the valve.



شکل ۴- تغییرات زمانی فشار در وسط لوله.

Figure 4. Pressure time history at the midpoint.

$$\frac{H - H_0}{\frac{cV_0}{g}} = \frac{18.25 - 0.97}{1324 \times 0.128} = \frac{17.28}{17.28} = 1.00 \quad (31)$$

بنابراین، میزان هد فشار مطابق محاسبات هیدرولیکی انجام شده در محل پشت شیر، معادل واحد می‌باشد که همین مقدار در شکل ۳ نیز نشان داده شده است. موج فشاری ایجاد شده پس از طی مسیر رفت و برگشت در طول لوله به تدریج میرا می‌شود. در شکل ۴، که محل مطالعه، نقطه وسط لوله می‌باشد، پس از قطع ناگهانی جریان، بر خلاف شکل ۳ که محل پشت شیر مورد بررسی بود، مدت زمانی طول می‌کشد که موج فشاری به وسط لوله برسد که از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$t = \frac{l/2}{c} = \frac{36.09/2}{1324} = 0.013629 \quad (32)$$

بنابراین، پس از بسته شدن شیر، موج فشاری پس از ۰/۰۱۳۶۲۹ ثانیه به وسط لوله می‌رسد.

$$\frac{ct}{l} = \frac{1324 \times 0.013629}{36.09} = 0.5 \quad (33)$$

با توجه به محاسبات صورت گرفته، انتظار می‌رود که در شکل ۳، موج فشاری روی عدد ۰/۵ صعود نماید که این اتفاق رخ می‌دهد. میزان ارتفاع صعود نیز مشابه حالت پشت شیر در شکل ۳، با استفاده از روابط هیدرولیکی محاسبه می‌شود، با این تفاوت که افت ناشی از اصطکاک تا وسط لوله نیز در این حالت، باید در محاسبه هد اولیه فشاری لحاظ گردد:

$$H_{0M} = H_0 - \frac{f \cdot l/2}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0.97 - \frac{0.78 \times 36.09/2}{0.0253} \cdot \frac{0.13^2}{2 \times 9.81} = 0.4908m \quad (34)$$

تحلیل شکل‌های فوق در دو بخش انجام می‌شود. ابتدا از دیدگاه هیدرولیکی محاسبات انجام می‌شود و سپس، نتایج حاصل از روش عددی بدون شبکه با سایر جواب‌ها مورد مقایسه قرار می‌گیرد. پس از بسته شدن شیر، موج فشاری ایجاد شده بلافاصله در پشت شیر ایجاد می‌شود که با در نظر گرفتن شکل ۲ و نوشتن رابطه انرژی بین دو نقطه از سیستم، یکی روی سطح آزاد آب مخزن و دیگری پشت شیر، می‌توان، هد فشار را پس از بسته شدن ناگهانی شیر، در محل پشت شیر، محاسبه نمود:

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{fl}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{0.13^2}{2 \times 9.81} + \frac{0.78 \times 36.09}{0.0253} \times \frac{0.13^2}{2 \times 9.81} \quad (28)$$

$$H_0 = 0.97m$$

که در آن،  $H_0$  معادل هد اولیه فشار در محل پشت شیر می‌باشد، حال، بر طبق مطالعات ژوکوفسکی پس از بسته شدن شیر، اختلاف ارتفاع ناشی از بسته شدن ناگهانی شیر از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta H = \frac{cV_0}{g} = \frac{1324 \times 0.13}{9.81} = 17.28m \quad (29)$$

که در آن،  $\Delta H$  هد موج فشاری ضربه قوچ می‌باشد. بنابراین، میزان هد فشار در پشت شیر، پس از قطع ناگهانی جریان، مجموع هد اولیه و هد ناشی از ایجاد موج فشاری می‌باشد:

$$H = H_0 + \Delta H = 0.97 + 17.28 = 18.25m \quad (30)$$

که در آن،  $H_0$  هد اولیه فشار و  $H$  هد فشار ایجاد شده پس از بسته شدن ناگهانی شیر در محل پشت شیر می‌باشد. حال، پارامتر بی‌بعد فشار، مطابق با محور عمودی شکل ۳، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

موج فشاری ایجاد شده پس از طی مسیر رفت و برگشت در طول لوله به تدریج میرا می‌شود. از طرفی با توجه به اشکال فوق، نتایج به دست آمده بین روش عددی قدرتمند زیلک و نیز روش عددی حاضر، از برآزش مطلوبی برخوردار هستند که نشان‌دهنده دقت بالای روش عددی بدون شبکه در محاسبات مربوطه می‌باشد. اما این برآزش، نسبت به نتایج تجربی در برخی نقاط، کم‌تر است که در مورد علت آن، می‌توان به دلایلی مانند مطالعه یک بعدی مدل ضربه قوچ، عدد رینولدز پایین جریان و نیز خطاهای آزمایشگاهی ناشی از افت اصطکاک در طول لوله اشاره نمود که در مقالات مشابه (۱۷) نیز چنین اختلافاتی مشاهده شده است. همچنین، میرایی موج فشاری ناشی از ضربه قوچ، در پشت شیر و وسط لوله در شکل ۵ نمایش داده شده است.

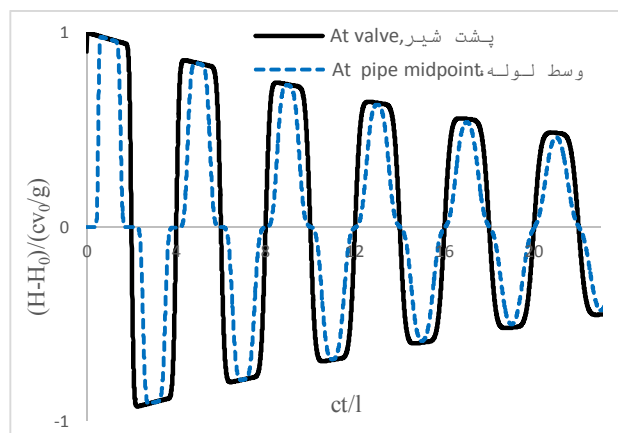
که در آن،  $H_{0M}$  هد فشار اولیه در محل وسط لوله و  $H_0$  هد اولیه در محل پشت شیر می‌باشد. حال، هد فشاری ناشی از تغییرات ناگهانی در سیستم برای نقطه وسط محاسبه می‌گردد.

$$\Delta H = \frac{cV_0}{g} = \frac{1324 \times 0.13}{9.81} = 17.28m \quad (35)$$

$$H_M = H_{0M} + \Delta H = 0.4908 + 17.28 = 17.7708m \quad (36)$$

که در آن،  $H_M$  هد فشار در محل وسط لوله می‌باشد، بنابراین، پارامتر بی‌بعد فشار، مطابق با محور عمودی شکل، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\frac{H - H_0}{\frac{cV_0}{g}} = \frac{17.7708 - 0.4908}{\frac{1324 \times 0.128}{9.81}} = \frac{17.28}{17.28} = 1.00 \quad (37)$$



شکل ۵- میرایی موج فشاری ضربه قوچ در لوله.

Figure 5. Damping of pressure wave at pipe.

مسئله دوم: در نظر است که جهت بررسی پدیده ضربه قوچ، از دیدگاه هیدرولیکی، دو نقطه بحرانی لوله مانند نقطه پشت شیر و وسط لوله مدنظر قرار گیرد و جواب‌های دقیق هد فشار در این دو نقطه پس از قطع ناگهانی جریان برق، در حالت بدون اصطکاک، محاسبه گردد. به این ترتیب، می‌توان، میزان دقت

همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود در نقطه پشت شیر، موج حاصله بلافاصله در پشت شیر ایجاد می‌شود اما در مورد نقطه وسط لوله، رسیدن موج به آن مکان، کمی زمان بر است. هر دو موج فشاری پس از طی مسیر رفت و برگشتی به تدریج میرا می‌شوند.

نتایج به‌دست آمده از روش عددی بدون شبکه را پس از مقایسه نتایج به‌دست آمده با جواب‌های دقیق، ارزیابی نمود. مراحل تحلیلی پاسخ به مسأله را تشریح و از اطلاعات مشخصات لوله در جدول ۱، استفاده نمایید.

جدول ۱- مشخصات سیال و اطلاعات شکل لوله (۱۳).

Table 1. Fluid properties and pipe configuration data.

مقادیر Values	مشخصات آزمایش Experiment properties
36.09	طول لوله (متر) Pipe length (m)
0.13	سرعت متوسط (متر بر ثانیه) Mean velocity (m/s)
878	جرم مخصوص سیال (کیلوگرم بر مترمکعب) Specific density of fluid (kg/m <sup>3</sup> )
1324	سرعت موج (متر بر ثانیه) Wave speed (m/s)
0.0253	قطر داخلی لوله (متر) Pipe diameter (m)
0.03483	ویسکوزیته سیال (پاسکال ثانیه) Fluid <sup>s</sup> viscosity (pa.s)
81.76	عدد رینولدز Reynolds number
0.78	ضریب دارسی- ویسباخ Darcy-Weisbach friction factor

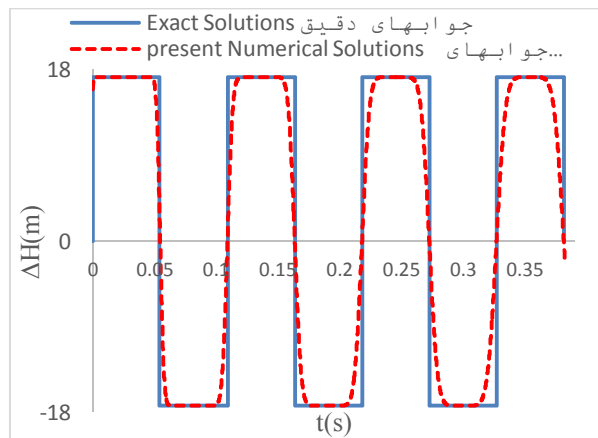
حال باید بررسی نمود، در این زمان که موج فشاری مجدداً به آن محل رسیده، دارای چه هد ارتفاعی می‌باشد، با توجه به این‌که از اثرات اصطکاک صرف‌نظر شده، بنابراین، پس از  $\frac{2l}{c}$  معادل  $0.109$  ثانیه ارتفاع موج فشاری در محل پشت شیر باز هم  $\Delta H$  متر می‌باشد. با تأثیر موج در این محل، هد موج فشاری در این لحظه و در این نقطه به صفر می‌رسد. برای بار سوم، در مسیر برگشت، پس از زمانی معادل  $t = \frac{4l}{c}$  یعنی  $0.218$  ثانیه مجدداً موج، به پشت شیر می‌رسد و هد موج فشاری که در این لحظه و این

پاسخ: نحوه محاسبه جواب‌های دقیق در مسأله ضربه قوچ به این صورت است که فرض می‌شود در  $t = 0$ ، جریان به‌طور ناگهانی قطع شود، در این صورت، موج فشاری به ارتفاع  $\Delta H = \frac{cV_0}{g} = \frac{1324 \times 0.13}{9.81} = 17.28m$  ایجاد شده و از شیر به سمت مخزن حرکت می‌کند. حال، اگر محل مشخصی از لوله مدنظر باشد، باید دید که موج فشاری مجدداً در چه زمانی به آن محل می‌رسد، مثلاً در مورد پشت شیر، زمان برگشت مجدد موج به پشت شیر، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$t = \frac{2l}{c} = \frac{2 \times 36.09}{1324} = 0.0545s \quad (38)$$

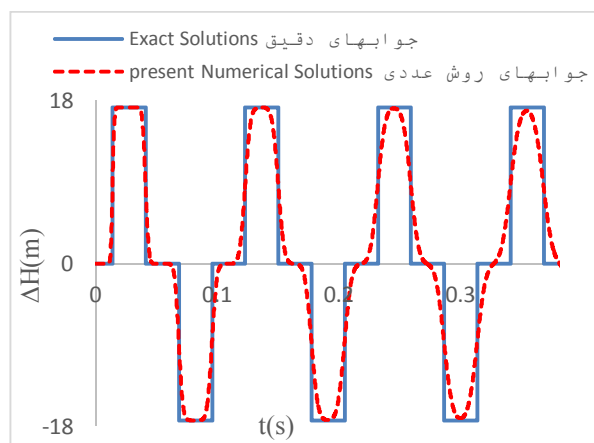
به صفر می‌رساند. به همین ترتیب، موج، مسیر رفت و برگشت را در طول لوله طی می‌نماید. تحلیل هیدرولیکی صورت گرفته در مورد نقطه وسط شیر نیز به همین ترتیب انجام می‌گردد. در ادامه شکل‌های مربوط به مسیر زمانی موج فشار در طول لوله در حین رخداد ضربه قوچ در دو نقطه پشت شیر و وسط لوله نمایش داده شده و با جواب‌های دقیق در این حالت، مورد صحت‌سنجی قرار گرفته است.

محل، صفر بوده، تحت‌تأثیر این موج، به مقداری کمتر از صفر می‌رسد و اصطلاحاً لوله تحت مکش قرار می‌گیرد و حتی ممکن است، در این لحظه پدیده کاویتاسیون نیز رخ دهد. بنابراین، پس از  $t = \frac{4l}{c}$  ثانیه، ارتفاع موج به  $-\Delta H$  در محل پشت شیر می‌رسد، در مسیر برگشت موج، مجدداً پس از  $\frac{6l}{c}$  معادل  $0/327$  ثانیه، موج به پشت شیر می‌رسد و فشاری که در آن لحظه و آن نقطه، مقداری منفی بوده



شکل ۶- مقایسه هد فشار در پشت شیر در حالت بدون اصطکاک.

Figure 6. Comparison of pressure head at the valve in frictionless state.



شکل ۷- مقایسه هد فشار در وسط لوله در حالت بدون اصطکاک.

Figure 7. Comparison of pressure head at the midpoint in frictionless state.

**مسأله سوم:** آزمایش دیگری که برای راستی‌آزمایی روش عددی بدون شبکه مورد استفاده قرار گرفته است، مربوط به آزمایش استریتر و وایلی (۲۶) می‌باشد. آزمایش متشکل از یک سیستم شیر، لوله و مخزن می‌باشد که از سیستم ایرچمبر برای ایجاد فشار ثابت در مخزن استفاده شده است. همچنین جریان میرا توسط بستن سریع یک شیر تویی که متصل به یک مخزن با سطح آزاد می‌باشد، ایجاد شده است. جنس لوله مسی بوده و سیال به‌کار گرفته شده آب می‌باشد. در جدول ۲ مشخصات مدل آزمایشگاهی نوشته شده است.

با توجه به شکل‌های فوق، در این مورد نیز بین نتایج حاصل از جواب‌های عددی بدون شبکه و جواب‌های دقیق همپوشانی مناسبی مشاهده می‌شود. جهت برآورد دقت روش عددی، از معیار مجموع مربعات خطا استفاده می‌گردد، همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، در بازه زمانی اول، نتایج به‌دست آمده به هم نزدیک‌ترند. میزان خطا در بازه زمانی اول حرکت موج از شیر به سمت مخزن، کم‌تر از ۳ درصد و در طول بازه نمایش داده شده به‌طور متوسط، ۵ درصد محاسبه گردید.

جدول ۲- مشخصات سیال و اطلاعات شکل لوله (۲۶).

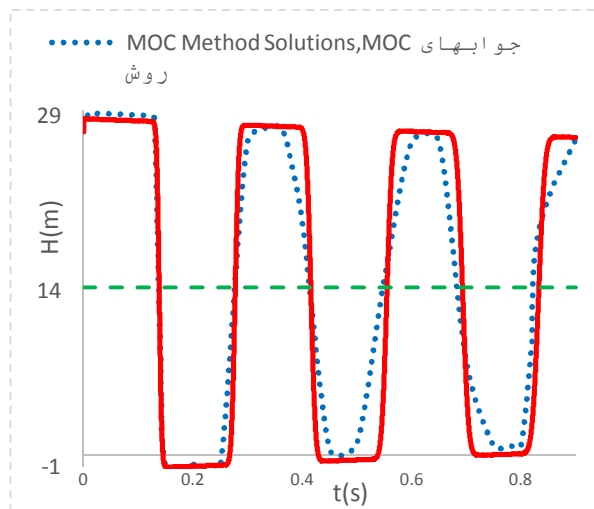
Table 2. Fluid properties and pipe configuration data.

مقادیر Values	مشخصات آزمایش Experiment properties
91.44	طول لوله (متر) Pipe length (m)
0.112	سرعت متوسط (متر بر ثانیه) Mean velocity (m/s)
998.9	جرم مخصوص سیال (کیلوگرم بر مترمکعب) Specific density of fluid (kg/m <sup>3</sup> )
1318.5	سرعت موج (متر بر ثانیه) Wave speed (m/s)
11.07	قطر داخلی لوله (میلی‌متر) Pipe diameter (mm)
$0.959 \times 10^{-6}$	ویسکوزیته سینماتیکی (مترمربع بر ثانیه) kinematic viscosity(m <sup>2</sup> /s)
1340	عدد رینولدز Reynolds number

شده و در زیر مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از روش عددی MOC و جواب‌های روش عددی بدون شبکه در قالب نمودار نشان داده شده است.

**پاسخ:** آزمایش فوق، توسط وایلی و استریتر در حالت‌های یک‌بعدی و دوبعدی با روش عددی MOC<sup>۱</sup> مدل‌سازی شده است. این آزمایش، نیز با مشخصات داده شده با روش عددی بدون شبکه حل

1- Method of Characteristics



شکل ۸- بار فشاری ضربه قوچ در پشت شیر.

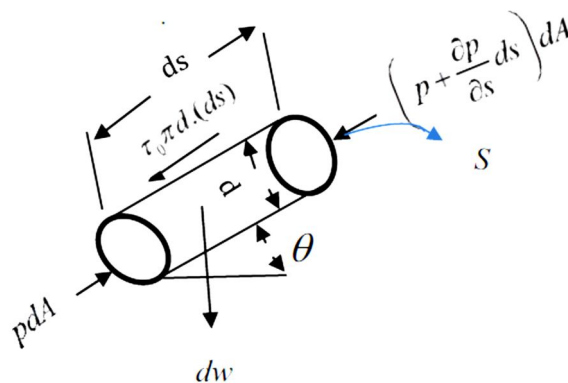
Figure 8. Pressure head of water hammer at the valve.

شده ناشی از ضربه قوچ در نتایج هر دو روش عددی مشاهده می‌شود.

مسئله چهارم: معادلات حاکم بر ضربه قوچ را در سیستم شیر، لوله و مخزن مورد نظر را در شرایطی بررسی نمایید که رقوم دو سر لوله متفاوت باشند.

با توجه به شکل فوق، در این مثال که جریان تحت تأثیر قطع ناگهانی جریان و رخداد ضربه قوچ قرار گرفته نیز، برازش مناسبی بین جواب‌های روش MOC و نیز جواب‌های عددی روش بدون شبکه مشاهده می‌گردد. لازم به ذکر است که نمودار ترسیم شده در این حالت، به صورت بعددار بوده و در این صورت نیز میرایی تدریجی هد موج فشاری ایجاد

پاسخ:



شکل ۹- المانی از سیال درون لوله و نیروهای وارد بر آن (۸).

Figure 9. A cylindrical fluid element with all forces shown (8).

(۴۳)

$$\frac{1}{g} \cdot (\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial s}) + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial s} (\gamma(H-z)) + \frac{dz}{ds} + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2gD} = 0$$

و نهایتاً:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2gD} = 0 \quad (۴۴)$$

در پدیده ضربه قوچ، به دلیل این که سرعت موج فشاری ده‌ها برابر سرعت جریان در لوله می‌باشد، از ترم‌های همرفتی صرف‌نظر می‌گردد، بنابراین، معادله مومنتوم در این حالت، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2D} = 0 \quad (۴۵)$$

که دقیقاً مشابه معادله مومنتوم در حالت لوله افقی است، بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر مجهول معادله ضربه قوچ که همان سرعت و فشار پس از قطع ناگهانی جریان در لوله می‌باشند، در سیستم ساده شیر، لوله و مخزن، مستقل از زاویه قرارگیری لوله نسبت به محور افق می‌باشند.

**مسئله پنجم:** آزمایش انجام شده در مورد رخداد ضربه قوچ توسط تایلینگ (۲۲) را مدنظر قرار دهید که مشخصات فیزیکی آن در جدول ۳ ذکر شده است. حال، روش کرنک- نیکلسون را که به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید:

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} = \theta \cdot F(\varphi^{n+1}) + (1-\theta) \cdot F(\varphi^n) \quad (۴۶)$$

معادلات حاکم بر ضربه قوچ در این حالت، نیز همان معادلات پیوستگی و مومنتوم می‌باشند. در این حالت، در معادله پیوستگی که از قانون بقای جرم استخراج شده، تغییری رخ نمی‌دهد. اما در بررسی معادله مومنتوم که برگرفته از قانون دوم نیوتن است، باید تأثیر نیروی وزن ناشی از شیب لوله لحاظ گردد، بنابراین قانون دوم نیوتن در امتداد محور مرکزی لوله نوشته می‌شود (۸):

$$\Sigma F_s = ma_s = m \frac{dv}{dt} \quad (۳۹)$$

$$p dA - \left[ p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right] dA - dw \cdot \sin \theta - \tau \pi \cdot ds = \frac{dw}{g} \frac{dv}{dt}$$

با جایگذاری تعاریف زیر در معادله فوق:

$$dw = \gamma A ds, \sin \theta = \frac{\partial z}{\partial s}, A = \frac{\pi d^2}{4} \quad (۴۰)$$

معادله به صورت زیر ساده می‌شود.

$$-\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{4\tau}{\gamma d} = \frac{1}{g} \cdot \frac{dw}{dt} \quad (۴۱)$$

حال، اگر سطح مقطع لوله به صورت جریان پر در نظر گرفته شود و سرعت متوسط جریان در لوله جایگزین شود (۸)، رابطه ۴۲ حاصل می‌گردد:

$$-\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{4\tau_0}{\gamma D} = \frac{1}{g} \cdot \frac{dV}{dt} \quad (۴۲)$$

با جایگزینی مقدار تنشی معادل تنش جریان پایدار در ضربه قوچ کلاسیک به صورت  $\tau_0 = \frac{1}{8} f \cdot \rho \cdot V \cdot |V|$  و همچنین، تعریف مشتق کامل سرعت، به صورت  $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s}$  و به کارگیری رابطه فشار پیرومتری به صورت  $p = \rho g(H-z)$  معادله به فرم زیر، ساده می‌شود:



بر حسب زمان، برای نقطه‌ای به فاصله ۱۱/۱۵ متر از ابتدای لوله با روش عددی بدون شبکه ترسیم و با جواب‌های دقیق در حالت بدون اصطکاک صحت‌سنجی نمایید. همچنین، حساسیت نتایج به دست آمده را با متغیر  $\theta$  و نیز نقاط گره‌ای مختلف با روش بدون شبکه بسنجید.

که در آن،  $\theta$  پارامتر کرنک نیکلسون می‌باشد که بین صفر تا یک در نظر گرفته می‌شود. معادله فوق به‌ازای  $\theta = 0$  به معادله اولر صریح و به‌ازای  $\theta = 1$  به معادله اولر ضمنی معروف است. در این مثال، معادلات حاکم بر ضربه قوچ را براساس متغیر کرنک- نیکلسون بازنویسی نموده و سپس نمودار توزیع فشار را

جدول ۳- مشخصات سیال و اطلاعات شکل لوله (۲۲).

Table 3. Fluid properties and pipe configuration data.

مقادیر Values	مشخصات آزمایش Experiment properties
20	طول لوله (متر) Pipe length (m)
1.002	سرعت متوسط (متر بر ثانیه) Mean velocity (m/s)
1000	جرم مخصوص سیال (کیلوگرم بر مترمکعب) Specific density of fluid (kg/m <sup>3</sup> )
1027.5	سرعت موج (متر بر ثانیه) Wave speed (m/s)
797	قطر داخلی لوله (میلی‌متر) Pipe diameter (mm)
$0.959 \times 10^{-6}$	ویسکوزیته سینماتیکی (مترمربع بر ثانیه) kinematic viscosity(m <sup>2</sup> /s)

حال، گام‌های زمانی در معادلات لحاظ می‌گردد:

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} + \theta \frac{c^2}{g} \frac{\partial V^{n+1}}{\partial x} + (1-\theta) \frac{c^2}{g} \frac{\partial V^n}{\partial x} = 0 \quad (49)$$

$$H^{n+1} + \theta \Delta t \frac{c^2}{g} \frac{\partial V^{n+1}}{\partial x} = -\Delta t (1-\theta) \frac{c^2}{g} \frac{\partial V^n}{\partial x} + H^n$$

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} + \theta (g \frac{\partial H^{n+1}}{\partial x} + f V^{n+1} \frac{|V^n|}{2D}) + (1-\theta) (g \frac{\partial H^n}{\partial x} + f V^n \frac{|V^n|}{2D}) = 0 \quad (50)$$

$$V^{n+1} + \theta \Delta t (g \frac{\partial H^{n+1}}{\partial x} + f V^{n+1} \frac{|V^n|}{2D}) = -(1-\theta) \Delta t (g \frac{\partial H^n}{\partial x} + f V^n \frac{|V^n|}{2D}) + V^n$$

پاسخ: با توجه به فرمول روش کرنک- نیکلسون، ابتدا معادلات پیوستگی و مومنتوم حاکم بر ضربه قوچ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \theta \frac{c^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + (1-\theta) \frac{c^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \theta (g \frac{\partial H}{\partial x} + f V \frac{|V|}{2D}) + (1-\theta) (g \frac{\partial H}{\partial x} + f V \frac{|V|}{2D}) = 0 \quad (48)$$

$$RHS_1 = H + \Delta t.(\theta - 1). \frac{c^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (55)$$

بنابراین، ماتریس ضرایب معادلات شکل دهنده روش عددی بدون شبکه، به صورت زیر خواهد بود:

$$RHS_2 = V + \Delta t.(\theta - 1)(g \frac{\partial H}{\partial x} + f \frac{V|V|}{2D}) \quad (56)$$

$$Lb_{11} = N \quad (51)$$

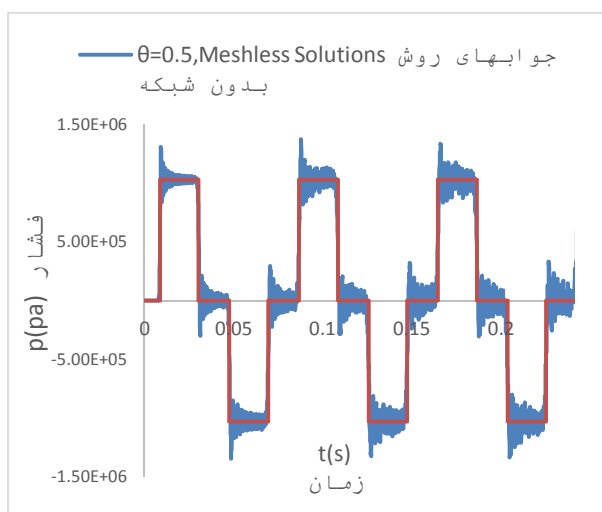
مراحل محاسبه جواب‌های دقیق در موقعیت مشخصی از ابتدای لوله کاملاً مشابه مسأله دوم می‌باشد، در ادامه، نمودار تغییرات فشار بر حسب زمان و صحت‌سنجی با پاسخ دقیق به‌ازای مقادیر مختلف نقاط گره‌ای و نیز متغیر روش کرنک- نیکلسون در بازه‌های زمانی مختلف در شکل‌های ۱۰ الی ۱۶ ترسیم گردیده است.

$$Lb_{12} = \theta. \Delta t. \frac{c^2}{g} \frac{\partial N}{\partial x} \quad (52)$$

$$Lb_{21} = \theta. g. \Delta t. \frac{\partial N}{\partial x} \quad (53)$$

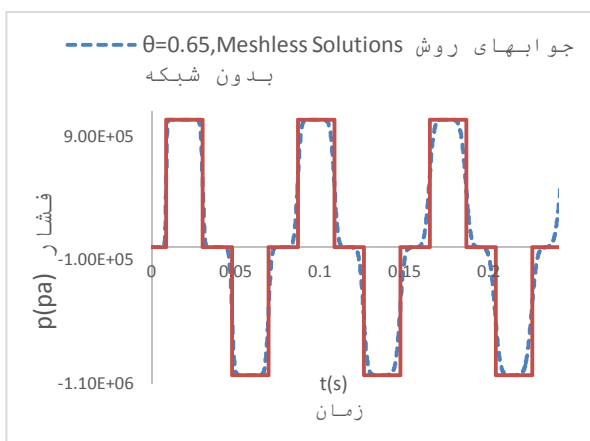
$$Lb_{22} = N + \theta. \Delta t. f. N \frac{|V|}{2D} \quad (54)$$

و بردار سمت راست معادلات نیز با توجه به رابطه‌های ۴۹ و ۵۰ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

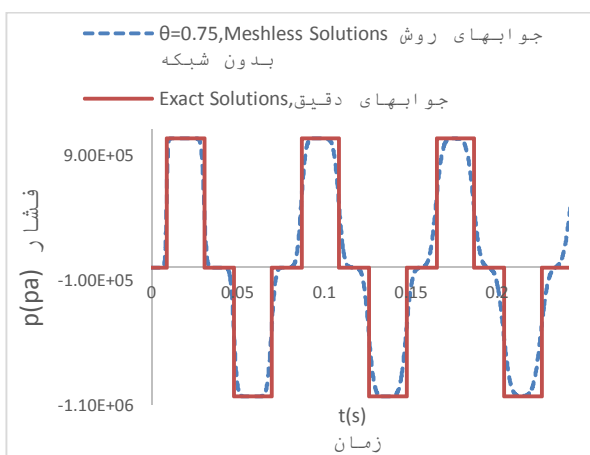


شکل ۱۰- فشار در مقطع ۱۱/۱۵ متر به‌ازای  $\theta=0.5$ .

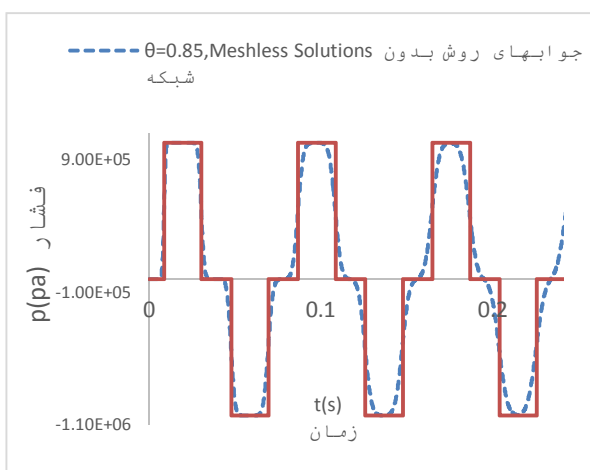
Figure 10. Pressure at  $x=11.15$  m for  $\theta=0.5$ .



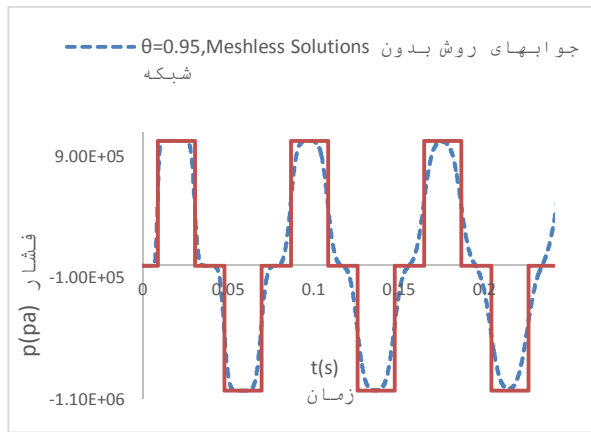
شکل ۱۱- فشار در مقطع ۱۱/۱۵ متر به ازای  $\theta=0.65$ .  
**Figure 11. Pressure at  $x=11.15$  m for  $\theta=0.65$ .**



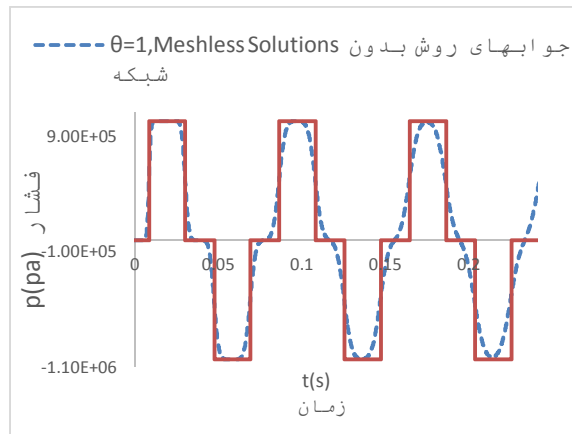
شکل ۱۲- فشار در مقطع ۱۱/۱۵ متر به ازای  $\theta=0.75$ .  
**Figure 12. Pressure at  $x=11.15$  m for  $\theta=0.75$ .**



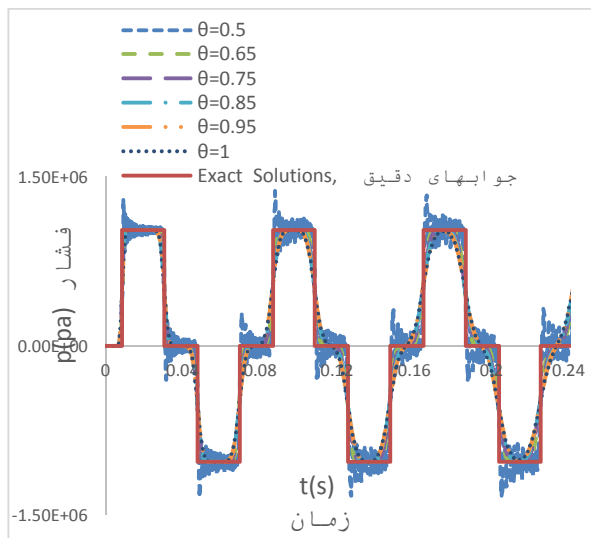
شکل ۱۳- فشار در مقطع ۱۱/۱۵ متر به ازای  $\theta=0.85$ .  
**Figure 13. Pressure at  $x=11.15$  m for  $\theta=0.85$ .**



شکل ۱۴- فشار در مقطع ۱۱/۱۵ متر به ازای  $\theta=0.95$ .  
**Figure 14. Pressure at  $x=11.15$  m for  $\theta=0.95$ .**



شکل ۱۵- تاریخچه فشار ضربه قوچ به ازای  $\theta=1$ .  
**Figure 15. Pressure time history for  $\theta=1$ .**



شکل ۱۶- مقایسه تأثیر پارامتر  $\theta$  بر تغییرات زمانی فشار.  
**Figure 16. Comparison of the effect of  $\theta$  parameter on pressure time history.**

## نتیجه گیری کلی

با توجه به لزوم بررسی دقیق پدیده ضربه قوچ پیش از طراحی سازه‌ها روش‌های عددی مختلفی برای مدل‌سازی دقیق این فرآیند، به کار گرفته شده که عمدتاً دارای خطاها و هزینه‌های محاسباتی بالا می‌باشند. در مقاله حاضر یک روش عددی برای مدل‌سازی این پدیده معرفی گردید که کاملاً بدون شبکه بوده و بدون نیاز به انتگرالگیری، ماتریس‌هایی مثبت معین تولید می‌کند که شرایط را برای حل مؤثر تکراری فراهم می‌سازد. در این روش، گسسته‌سازی حوزه مکانی تنها با استفاده از یک سری نقاط پراکنده صورت می‌گیرد که همین امر باعث کاهش هزینه‌های گسسته‌سازی در مسائلی با مرزهای پیچیده می‌شود. به‌منظور نشان دادن کارایی روش مزبور چند مسأله آزمایشی ضربه قوچ با روش فوق، مدل‌سازی شده و نتایج حاصله با جواب‌های دقیق و نیز با جواب‌های سایر روش‌های عددی مورد راستی‌آزمایی قرار گرفت و مشخص گردید که نتایج به دست آمده از برازش قابل‌قبولی برخوردار است که نشانگر دقت بالای این روش در تحلیل پدیده ضربه قوچ بوده و می‌تواند به‌عنوان یکی از روش‌های دقیق عددی در تحلیل مسایل جریان‌های میرا در سیستم لوله‌ها و تاسیسات آبرسانی محسوب گردد.

از نکات مهمی که در تحلیل مسأله فوق، می‌توان به آن اشاره نمود، بررسی حساسیت متغیرها در دقت نتایج حاصله می‌باشد.

الف- با ثابت نگهداشتن سایر پارامترها و ایجاد تغییر در متغیر نقاط گره‌ای به دفعات و بررسی نتایج حاصله هیچ تغییری در نمودار و پاسخ‌های تحلیلی حاصل نگردید. بنابراین می‌توان پارامتر نقاط گره‌ای را در تحلیل ضربه قوچ، به‌عنوان متغیر مستقل در نظر گرفت.

ب- با قرار دادن  $\theta = 0.5$ ، همان‌طور که در شکل، نشان داده شده است، اعوجاج شدیدی در جریان، رخ می‌دهد. در واقع، در این حالت، مرتبه گسسته‌سازی زمانی به ۲ نزدیک می‌شود که باعث کاهش شدید پخشیدگی شده که نهایتاً ناپایداری عددی را به همراه دارد. به‌ازای مقادیری کمتر از ۰/۵، نیز هیچ شکل مشخصی از پخشیدگی جریان مشاهده نمی‌شود و نمودار فشار به‌صورت یک خط مستقیم روی عدد صفر، امتداد می‌یابد.

ج- مسأله مورد نظر به روش کرنک-نیکلسون به‌ازای پارامترهای مختلف  $\theta > 0.105$  مورد اجرا و تحلیل قرار گرفت و حالت  $\theta = 0.165$  با تخمین خطایی کمتر از ۲ درصد در کل بازه مورد بررسی به‌عنوان بهترین پاسخ از لحاظ نزدیکی به پاسخ دقیق انتخاب گردید.

## منابع

1. Afshar, M.H., and Lashckarbolok, M. 2008. Collocated discrete least-squares (CDLS) meshless method: Error estimate and adaptive refinement. *Numerical Methods in Fluids J.* 56: 10. 1909-1928.
2. Afshar, M.H., Amani, J., and Naisipour, M. 2012. A node enrichment adaptive refinement in Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems. *Eng. Anal. Bound. Elem. J.* 36: 3. 385-393.
3. Arzani, H., and Afshar, M.H. 2006. Solving Poisson's equations by the discrete least square meshless method. *WIT Trans. Model. Simul. J.* 42: 5. 23-32.
4. Atluri, S.N., and Zhu, T. 1998. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics.* 22: 2. 117-127.
5. Babuska, I., and Melenk, J. 1995. The partition of unity finite element method. Technical report technical note BN-1185. Institute for Physical Science and Technology. University of Maryland.

6. Belytschko, T., Lu, Y.Y., and Gu, L. 1994. Element-free Galerkin method. *Inter. J. Num. Method. Engin.* 37: 2. 229-256.
7. Bergant, A., Hou, Q., Keramat, A., and Tijsseling, A. 2011. Experimental and numerical analysis of water hammer in a large-scale PVC pipeline apparatus. P 27-36, 4<sup>th</sup> International Meeting on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems, Belgrade, Serbia.
8. Bruce, E., Larock, Roland W. Jeppson and Gary Z. Watters. 2000. *Hydraulics of Pipeline Systems*. CRC Press, Pp: 283-380.
9. Daneshfaraz, R., Sadeqfam S., and Majedi Asl, M. 2011. The effect of non-linear terms on the process of computing water hammer with regard to friction coefficients for different cast iron pipe. *Inter. J. Engin. Appl. Sci. (IJEAS)*. 3: 3. 15-22.
10. Dilts, G.A. 1999. Moving least-squares-particle hydrodynamic – I. Consistency and stability. *Inter. J. Num. Method. Engin.* 44: 8. 1115-1155.
11. Duarte, C.A., and Oden, J.T. 1996. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 12: 6. 673-705.
12. Gingold, R.A., and Moraghan, J.J. 1977. Smooth particle hydrodynamics: theory and application to non spherical stars. *Man. Not. Roy. Astron. Soc.* 181: 3. 375-389.
13. Holmboe E.L., and Rouleau W.T. 1967. The effect of viscous shear on transients in liquid lines, *Basic Eng. J.* 89: 1. 174-180.
14. Korbar, R., Virag, Z., and Šavar, M. 2014. Truncated method of characteristics for quasi-two-dimensional water hammer model. *Hydraul. Eng. J.* 140: 6. 04014013-1: 04014013-7.
15. Liu, W.K., Li, S., Adee, J., and Belytschko, T. 1995. Reproducing kernel particle Methods. *Inter. J. Num. Method. Engin.* 20: 8-9. 1081-1106.
16. Liu, G.R., and Tu, Z.H. 2002. An adaptive procedure based on background cells for meshless methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. J.* 191: 17-18. 1923-1943.
17. Nathan, G.K., Tan, J.K., and Ng, K.C. 1988. Two dimensional analysis of pressure transients in pipelines, *Num. Method. Fluid. J.* 8: 5. 339-349.
18. Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P. 1992. Generalizing the finite element method diffuse approximation and diffuse element. *Computational Mechanics*. 10: 5. 307-318.
19. Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L. 1996. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *Inter. J. Num. Method. Engin.* 36: 22. 3839-3866.
20. Saikia, M., and Sarma, A.K. 2006. Simulation of water hammer flows with unsteady friction factor. *J. Engin. Appl. Sci.* 1: 4. 35-40.
21. Shamloo, H., Norooz, R., and Mousavifard, M. 2015. A review of one-dimensional unsteady friction models for transient pipe flow. P 2278-2288, The second national conference on applied research in science and technology, Faculty of Science, Cumhuriyet University.
22. Tijsseling, S., and Bergant, A. 2007. Meshless computation of water hammer. P 65-77, 2<sup>nd</sup> IAHR International meeting of the workgroup on cavitation and dynamic problems in hydraulic machinery and systems. Timisoara, Romania.
23. Wahba, E.M. 2006. Runge–Kutta time-stepping schemes with TVD central differencing for the water hammer equations. *Int. J. Num. Method. Fluid.* 52: 5. 571-590.
24. Wahba, E.M. 2008. Modelling the attenuation of laminar fluid transients in piping systems. *Appl. Math. Model J.* 32: 12. 2863-2871.
25. Wahba, E.M. 2013. Non-Newtonian fluid hammer in elastic circular pipes: Shear-thinning and shear-thickening effects. *Non-Newtonian Fluid Mech. J.* 198: 10. 24-30.
26. Whilie, E.B., and Streeter, V.L. 1978. *Fluid Transient*, McGraw Hill, United states of America, Pp: 379-420.
27. Zanganeh, R., Ahmadi, A., and Keramat, A. 2014. Fluid–structure interaction with viscoelastic supports during waterhammer in a pipeline. *J. Fluid. Structure.* 54: 6. 215-234.
28. Zielke, W. 1968. Frequency- Dependent Friction in Transient Pipe flow. *Basic Eng. J.* 90: 1. 109-115.



Gorgan University of Agricultural  
Sciences and Natural Resources

*J. of Water and Soil Conservation, Vol. 25(3), 2018*

<http://jwsc.gau.ac.ir>

DOI: 10.22069/jwsc.2018.14532.2936

## **Numerical solution of water hammer phenomenon using collocated discrete least squares method**

**B. Norouzi<sup>1</sup>, A. Ahmadi<sup>2</sup>, \*M. Lashkarblook<sup>3</sup> and M. Norouzi<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Ph.D. Student, Dept. of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran,

<sup>2</sup>Associate Prof., Dept. of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran,

<sup>3</sup>Assistant Prof., Dept. of Civil Engineering, Golestan University, Gorgan, Iran,

<sup>4</sup>Associate Prof., Dept. of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Received: 01.08.2018; Accepted: 05.09.2018

### **Abstract**

“Water hammer” is one of the phenomena that causes damage in the pipe system and reduces their useful life. Various numerical methods have been used to analyze this problem. In all numerical methods, for calculating the variables that are the velocity and pressure values due to the sudden discontinuity of the flow and motion of the pressure wave along the pipe, the continuum environment of the problem must be discretized in some way. With calculating these aberrations before designing of the structures accurately, appropriate measures can be taken to reduce tensions caused by the water-hammer phenomenon.

**Background and Objectives:** The conventional method to numerically solve the differential equations that describe this phenomenon is the method of characteristic lines. In general, in conventional methods where have been developed correctly, such as finite element, finite volume and finite difference, discretization of the spatial domain of the problem is done by gridding. Despite the useful use of these methods in many scientific fields, gridding is a costly and troublesome process, especially on problems with complex boundaries. That is the main motive for the creation of meshless methods. In these methods, the spatial domain of the problem is simply discretized by a number of points.

**Materials and Methods:** In the present study, for modeling classical water-hammer in a system including valve, pipe and reservoir, a collocated discrete least squares method is used. In the proposed approach implicit Crank-Nicolson method for time discretization is used to provide conditions for problem solving stability. In this method, the velocity and pressure values on the x-t plane are calculated directly from the previous time step simultaneously. This method is quite matrix and the solution process is accomplished including several simple algebraic operations on matrices.

**Results:** In this study, at first this numerical method is described generally then governing equations are calculated and several experiments on water hammer in the form of the problem have been modeled by this method, also the hydraulic analysis of problems and calculation steps for calculating accurate answers are fully described and the results are verified with exact answers and other numerical methods such as MOC method and numerical method used by “Zielk” and the computational average error was estimated to be less than 5% by total squared error criterion. So this method can be considered as a precise, simple and low-cost numerical method for modeling water-hammer phenomena.

**Conclusion:** Important properties of the Meshless numerical method included no need to integrate, complete mathematical math operations and meshless space makes it one of the most accurate methods for numerical solution of water hammer phenomenon in the pipe system.

**Keywords:** Meshless numerical method, Pipe system, Water hammer

---

\* Corresponding Author; Email: mlbolok@iust.ac.ir

