دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان
نشریه پژوهش‌های حفاظت آب و خاک
جلد بیست و چهارم، شماره چهارم، ۱۳۹٦
http://jwsc.gau.ac.ir

توسعه یک مدل عددی جدید بر مبنای گالرکین‌ناپیوسته برای شبیه‌سازی تهاجم آب شور دریا به آبخوان‌های ساحلی

***علی رئیسی[1]، حمیدرضا غفوری[2] و داود رستمی[3]**
[1]دانش‌آموخته دکتری گروه مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران اهواز، [2]استاد گروه مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران اهواز،
[3]استاد گروه علوم ریاضی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی قزوین
تاریخ دریافت: ۹۵/٤/۱٤ ؛ تاریخ پذیرش: ۹۵/۹/۲۱

چکیده

سابقه و هدف: آبخوان‌های ساحلی از مهم‌ترین منابع تامین آب شیرین در بسیاری از کشورهای جهان، به‌خصوص در نواحی خشک و نیمه‌خشک به‌شمار می‌رود. به‌دلیل مجاورت و ارتباط آبخوان‌های ساحلی با آب شور دریا و تهدید ناشی از آلوده شدن آن‌ها به‌واسطه پیش‌روی آب شور، مدیریت و حفاظت این منابع آب شیرین ساحلی امری کاملاً ضروری است. بنابراین هدف از پژوهش حاضر، توسعه یک مدل عددی جدید برای شبیه‌سای انتقال آلودگی در آبخوان‌های ساحلی (تهاجم آب شور دریا به آبخوان‌های ساحلی) با استفاده از روش عددی گالرکین‌ناپیوسته می‌باشد.

مواد و روش‌ها: در این پژوهش روش‌های گالرکین‌ناپیوسته که کم‌تر در مسائل مهندسی گسترش پیدا کرده است، برای شبیه‌سازی جریان‌های وابسته به چگالی آب زیرزمینی (مانند هجوم آب شور دریا به آبخوان‌های ساحلی) به‌کار گرفته شد. برای این منظور معادلات غیرخطی حاکم بر جریان و انتقال شوری در یک محیط آبخوان اشباع با استفاده از روش گالرکین‌ناپیوسته منقطع‌سازی گردید و از روش ضمنی برای منقطع‌سازی زمانی استفاده شد. پس از اعمال شرایط مرزی و اولیه، روش پیکارد اصلاح شده برای خطی‌سازی معادلات جبری حاصله به‌کار گرفته شد که برای از بین بردن نوسانات غیرفیزیکی در حل عددی از محدودکننده شیب چاونت- جافری استفاد شد.

یافته‌ها: به‌منظور ارزیابی و صحت‌سنجی مدل پنج مسأله شامل مسأله استاندارد هنری، دو مسأله اصلاح شده هنری، مسأله الدر و در نهایت مسأله آزمایشگاهی گاسوامی- سلمنت در سه فاز متفاوت مورد استفاده قرار گرفت. برای تمامی مسائل نتایج با سایر حل‌های ارائه شده برای آن مسائل مقایسه گردید تا دقت مدل قابل ارزیابی باشد. همگرایی روش با ریز کردن شبکه حل در مسأله استاندارد هنری نشان داده شد. محدودکننده شیب چاونت- جافر برای کنترل نوسانات غیرفیزیکی در حل مسأله آزمایشگاهی به‌طور موفقیت‌آمیزی به‌کار گرفته شد که نتایج رضایت‌بخشی از آن به‌دست آمد. نتایج حاصل دقت مدل را در مقایسه با سایر روش‌های عددی به‌خوبی نشان داده است.

نتیجه‌گیری: مدل با استفاده از مسائل مذکور مورد صحت‌سنجی و ارزیابی قرار گرفت که نتایج حاصل در تمامی مثال‌ها بیانگر دقت بسیار بالای این روش دارد. در مکان‌هایی از دامنه حل که سرعت جریان بالاست، نشان داده شد

* مسئول مکاتبه: a-raeisi@phdstu.scu.ac.ir

این روش در مقایسه با برخی روش‌ها همانند تفاضل محدود نوسانات غیرفیزیکی از خود بروز نمی‌دهد. علاوه بر این نتایج نشان می‌دهد که این روش نسبت به روش‌های عددی دیگر هم‌چون روش احجام محدود پخش عددی کم‌تری را بروز می‌دهد. همین‌طور استفاده از این روش برای شبیه‌سازی مسأله آزمایشگاهی جنبه کاملاً عملی این مدل را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: گالرکین‌ناپیوسته، جریان‌های وابسته به چگالی، بقاء محلی، تهاجم آب شور دریا، محدودکننده شیب

مقدمه

در آبخوان‌های ساحلی تحت شرایط معمول و طبیعی آب زیرزمینی به درون اقیانوس یا دریا تخلیه می‌گردد، که با افزایش برداشت آب زیرزمینی در این مناطق، جریان آب زیرزمینی به‌سمت دریا، کاهش و یا حتی معکوس می‌گردد این مسأله باعث ورود و نفوذ آب شور دریا به آبخوان‌های ساحلی و آلوده شدن آن‌ها می‌گردد. این پدیده را تهاجم آب شور می‌نامند. در صورتی که آب شور به‌سمت خشکی تا چاه‌های برداشت پیش‌روی نماید، آب زیرزمینی غیرقابل استفاده می‌گردد و علاوه بر این، آبخوان آلوده به نمک می‌شود که برای زدودن و شستن این نمک‌ها، در صورتی که آب شیرین هم به اندازه کافی موجود باشد، ممکن است سالیان زیادی زمان لازم باشد. بنابراین استفاده از شبیه‌سازهای عددی در پیش‌بینی وضعیت آب‌های زیرزمینی و انتشار آلودگی و مدیریت آن‌ها نقش مهمی دارد که هدف اصلی این پژوهش نیز ارائه یک مدل شبیه‌ساز دقیق‌تر بر مبنای گالرکین‌ناپیوسته است.

در مدل‌سازی جریان‌های وابسته به چگالی آب زیرزمینی (مانند تهاجم آب شور دریا به آبخوان‌های ساحلی) معمولاً از دو معادله کوپل شده شامل معادله جریان و انتقال شوری به‌عنوان معادلات حاکم استفاده می‌شود. واضح است که دقت نتایج تا حد زیادی به خود مدل عددی مربوط می‌شود. به‌علت این‌که روش‌های گالرکین‌ناپیوسته دارای بقاء و دقت محلی و پخش عددی کم‌تر هستند، گزینه مناسبی برای مدل‌سازی این نوع مسائل به‌شمار می‌روند. از این‌رو در این پژوهش از روش‌های گالرکین‌ناپیوسته (DG)[1] برای منقطع‌سازی مکانی معادلات حاکم استفاده شد.

تاکنون پژوهش‌های متعددی روی مدل‌سازی جریان‌های وابسته به چگالی با استفاده از روش‌های تفاضل محدود (٤ و ۱۰)، اجزاء محدود (۵، ۱۲ و ۲۵)، روش مشخصه‌ها (۲۰ و ۲۱)، احجام محدود (۷ و ۸) و ... انجام شده است. پژوهش‌های متعددی نیز وجود دارد که در آن‌ها به بررسی جنبه‌های مختلف جریان‌های وابسته به چگالی با استفاده از مدل‌های عددی پرداخته شده است (برای نمونه ٦، ۱۸ و ۲۹). به‌عنوان مثال مازیا و پوتی (۲۰۰۲) دو نوع فرمول‌بندی براساس متغیرهای وابسته، یعنی بار هیدرولیکی/ غلظت و فشار/ کسر جرمی، را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه دست یافتند که فرمول‌بندی دوم دارای دقت بیش‌تری به‌خصوص در شبیه‌سازی‌های طولانی‌مدت می‌باشد. بوئس و اولتئان (۲۰۰۱) فرمول‌بندی دارای بقاء و بدون بقاء را مورد مقایسه قرار دادند (۱۹). همچنین برخی پژوهشگران (۱۵ و ١٦) به بررسی تقریب اوبربک- بوسینسک روی نتایج پرداختند. برخی دیگر (۱ و ۲٦) به بررسی تاثیرات ناهمگنی و ناهمسانی محیط متخلخل بر روی فرایند انتقال شوری و در نتیجه بوجود آمدن ناپایداری‌های ناشی از آن پرداختند. اما به‌دلیل محدود بودن مسائل

1- Discontinuous Galerkin

مبنای دارای حل تحلیلی برای صحت‌سنجی مدل‌های وابسته به چگالی، در سال‌های گذشته عده‌ای (۲۷، ۲۸ و ۳۳) مسائل مبنا را مورد بحث و تحلیل قرار دادند که برای مدل‌های سه‌بعدی، ووس و سوزا (۲۰۱۰) در پژوهشی وسیع به بررسی مسائل مبنای مورد استفاده قبلی پرداختند تا دریابند کدام یک از این مسائل، فیزیک جریان‌های وابسته به چگالی را بهتر نمایش می‌دهد و کدام یک برای محک مدل‌های شبیه‌سازی مناسب‌تر است. در این بین بعضی نیز در مورد مشکلات عددی که در مدل‌سازی این جریان‌ها ظاهر می‌شوند، پژوهش نمودند. به‌عنوان مثال بحث تقریب سرعت هماهنگ[1] یکی از مباحث بسیار مهم در مدل‌سازی عددی جریان‌های وابسته به چگالی به‌شمار می‌رود. افراد زیادی این موضوع را با استفاده از روش‌های اجزاء محدود و احجام محدود مد نظر قرار دادند که از آن جمله می‌توان به پژوهش‌های ووس و سوزا (۱۹۸۷)، دیرش و کلدیتز (۲۰۰۲) و فرالکوویچ (۱۹۸۸) در این زمینه اشاره کرد (۶، ۷ و ۳۰). مشکل دیگری که در این زمینه وجود دارد حل سیستم‌های غیرخطی منتجه از جفت معادلات منقطع‌شده می‌باشد. به‌عنوان مثال پوتی و پانیکونی (۱۹۹۵) روش نیوتن جزئی را مطرح کردند تا اندازه سیستم ماتریس موجود را کاهش داده تا برابر آن‌چه در روش پیکارد است بشود. پژوهش دیگری که در این زمینه می‌توان نام برد، پژوهش آکرر (۲۰۰۴) در مورد روش پیکارد است (۲). او این روش را به‌نحوی اصلاح نمود تا سرعت همگرایی در آن افزایش پیدا کند.

هدف از پژوهش حاضر، ارزیابی روش‌های DG در فرایند شبیه‌سازی تهاجم آب شور دریا می‌باشد که به‌دلیل دقت و قابلیت‌های تطابقی این روش‌ها بسیار سازگار با فیزیک این‌گونه مسائل می‌باشد.

1- Consistent velocity approximation

مواد و روش‌ها

معادلات حاکم بر جریان: معادلات حاکم بر جریان‌های وابسته به چگالی تحت شرایط دمای ثابت، از دو معادله دیفرانسیل جفت شده جریان و انتقال شوری تشکیل شده است. این معادلات به‌ترتیب از ترکیب معادلات دارسی و فیک با معادله توازن جرم به‌دست می‌آید. بنابراین در یک سیستم آبخوان اشباع معادله جریان بر حسب بار هیدرولیکی آب شیرین معادل را می‌توان به‌صورت ذیل بیان نمود (۳ و ۵):

$$S_0\frac{\partial h}{\partial t}+\phi\beta_c\frac{\partial C}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\frac{\rho}{\rho_0}q\right)=\frac{\rho_R}{\rho_0}Q_R-\frac{\rho}{\rho_0}Q_P \qquad (۱)$$

$$h=z+\frac{P}{\rho_0 g} \qquad (۲)$$

$$q=-\frac{\mu_0}{\mu}K_0\left(\nabla h+\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\nabla z\right) \qquad (۳)$$

$$K_0=\frac{\rho_0 g k}{\mu_0},\qquad K=\frac{\rho g k}{\mu} \qquad (٤)$$

که در آن‌ها، S_0 ضریب ذخیره ویژه آبخوان $[L^{-1}]$، h بار هیدرولیکی آب شیرین معادل $[L]$، C کسر جرمی غلظت نسبی $[-]$، P فشار سیال $[ML^{-1}T^{-2}]$، ρ چگالی سیال $[ML^{-3}]$، ρ_0 چگالی آب شیرین (چگالی مرجع) $[ML^{-3}]$، ϕ تخلخل محیط متخلخل $[-]$، Q_P و Q_R به‌ترتیب میزان برداشت و تغذیه از آب زیرزمینی $[T^{-1}]$، ρ_R چگالی آب تغذیه‌شده $[ML^{-3}]$، q سرعت دارسی $[LT^{-1}]$، β_c ضریب تفاوت چگالی آب شور و شیرین $[-]$، K_0 تانسور هدایت هیدرولیکی آب شیرین (مرجع) $[LT^{-1}]$، K تانسور هدایت هیدرولیکی سیال $[LT^{-1}]$، k تانسور ضریب نفوذپذیری $[L^2]$، μ ویسکوزیته سیال $[ML^{-1}T^{-1}]$، μ_0 ویسکوزیته آب شیرین $[ML^{-1}T^{-1}]$، g شتاب ثقل $[LT^{-2}]$ و z تراز نسبت به سطح مبنا $[L]$ می‌باشد.

همین‌طور معادله انتقال شوری را می‌توان بر حسب کسر جرمی نسبی (برای اختصار کسر جرمی) به‌ترتیب ذیل به‌دست آورد (۳ و ۵):

$$\phi\rho\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho C\mathrm{q} - \phi\rho \mathrm{D}\nabla C) = \rho_R C_R Q_R - \rho C Q_P \quad (5)$$

$$\phi\,\mathrm{D} = (\alpha_T|\mathrm{q}| + \phi\tau D_m)\mathrm{I}(\alpha_L - \alpha_T)\frac{\mathrm{q}\mathrm{q}^T}{|\mathrm{q}|} \quad (6)$$

که در آن‌ها، C_R کسر جرمی آب تغذیه شده $[-]$، D تانسور ضریب پراکندگی هیدرودینامیکی $[L^2T^{-1}]$، $|\cdot|$ علامت نشان‌دهنده مقدار یک بردار، D_m ضریب پخشیدگی مولکولی $[L^2T^{-1}]$، τ ضریب پیچاپیچی[1] محیط متخلخل $[-]$، I ماتریس واحد و α_L و α_T به‌ترتیب پراکندگی طولی و عرضی $[L]$ می‌باشد.

در این پژوهش رابطه میان تغییر کسر جرمی و چگالی / ویسکوزیته سیال به‌صورت خطی در نظر گرفته شده است (۳):

$$\rho = \rho_0(1 + \beta_c C) \quad (7)$$

$$\mu = \mu_0(1 + \beta_\mu C) \quad (8)$$

که در آن‌ها، β_μ ضریبی است که کسر جرمی را با ویسکوزیته سیال مرتبط می‌سازد.

شرایط اولیه و مرزی: دامنه حل $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ را با مرز $\partial\Omega$ در نظر بگیرید. شرایط اولیه برای معادله جریان (۱) و معادله انتقال (۲) را می‌توان به شکل زیر تعریف نمود:

$$h(\cdot,0) = h_0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad (9)$$

$$C(\cdot,0) = C_0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad (10)$$

که در آن‌ها، h_0 و C_0 به‌ترتیب بار هیدرولیکی آب شیرین و کسر جرمی غلظت در زمان شروع شبیه‌سازی است.

1- Tortuosity

برای معادله جریان شرایط مرزی به‌صورت شرط مرزی دیریشله و نیومن[2] تعریف می‌شود:

$$h = h_D \quad \text{on} \quad \partial\Omega_D \quad (11)$$

$$\mathrm{q}\cdot\mathrm{n} = q_N \quad \text{on} \quad \partial\Omega_N \quad (12)$$

که در آن، رابطه $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ برقرار است و n بردار برون‌سوی عمود بر مرز، h_D بار هیدرولیکی روی مرز دیریشله ($\partial\Omega_D$) و q_N شار خروجی از مرز نیومن () $\partial\Omega_N$ است.

برای معادله انتقال شرایط مرزی به‌کار رفته عبارتست از:

$$C = C_D \quad \text{on} \quad \partial\Omega_D \quad (13)$$

$$-\mathrm{D}\nabla C\cdot\mathrm{n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_N \quad (14)$$

بنابراین خواهیم داشت: $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N = \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out}$. و C_D مقدار کسر جرمی روی مرز دیریشله است.

فرمول‌بندی به روش گالرکین‌ناپیوسته: در پژوهش حاضر برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله از دسته‌ای از روش‌های گالرکین‌ناپیوسته، به‌نام روش‌های گالرکین‌ناپیوسته اولیه یا روش‌های پنالتی داخلی، استفاده شده است. روش مورد استفاده در این پژوهش روش پنالتی داخلی ناقص[3] (IIPG) می‌باشد. از این روش هم برای منقطع‌سازی معادله جریان و هم برای منقطع‌سازی معادله انتقال استفاده شده است. این روش هم برای معادله جریان و هم برای معادله انتقال تاکنون در این مسائل مورد استفاده

2- Dirichlet and Neumann
3- Incomplete interior penalty Galerkin

قرار نگرفته است. قبل از گسسته‌سازی معادلات علائم ریاضی به‌کار برده شده معرفی شود:

دوره کل شبیه‌سازی با حرف T نمایش داده می‌شود و تقسیم‌بندی آن به زیر بازه‌ها به شکل $0 = t_0 < t^1 < t^2 < \cdots < t^N = T$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین در نظر بگیرید دامنه حل Ω بر اساس تقسیم‌بندی $\mathcal{E}_h = \{E_i\}_{N_h}$ به المان‌های زیر مجموعه تقسیم‌بندی شود. در اینجا منظور از N_h همان تعداد المان و E نمایش‌دهنده یک المان دلخواه است. اندازه و مرز یک المان به‌ترتیب با $|E|$ و ∂E نشان داده می‌شود. در صورتی که مجموعه همه وجوه المان‌ها با $\mathcal{F}_h$ نمایش داده شود، آن‌گاه مجموعه وجوه داخلی و وجوه مرزی را می‌توان به‌گونه‌ای تعریف نمود که $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^B$. وجوه مرزی را می‌توان به وجوه دیریشله و نیومن یا وجوه ورودی و خروجی جریان تقسیم‌بندی نمود به‌گونه‌ای که خواهیم داشت، $\mathcal{F}_h^B = \mathcal{F}_h^D \cup \mathcal{F}_h^N = \mathcal{F}_h^{in} \cup \mathcal{F}_h^{out}$. اگر Γ یک وجه داخلی با اندازه $|\Gamma|$ باشد، آنگاه دو المان مجاور همانند E_Γ^- و E_Γ^+ برای آن وجود دارد به‌طوری‌که $\Gamma = \partial E_\Gamma^- \cap \partial E_\Gamma^+$. همین‌طور n_Γ به‌عنوان بردار عمود بر Γ در نظر گرفته می‌شود که جهت آن از E_Γ^- به E_Γ^+ مطابق جهت n_Γ^- و مخالف جهت n_Γ^+ است. اگر اثرات[1] تابعی همچون ψ روی وجه Γ (مشترک بین دو المان) با $\psi_\Gamma^\pm$ نمایش داده شود، سپس پرش و میانگین تابع ψ روی وجه Γ چنین تعریف می‌شود:

$$[\![\psi]\!] = \psi_\Gamma^- - \psi_\Gamma^+ \qquad \text{(۱۵- الف)}$$

$$\langle\psi\rangle = \frac{1}{2}(\psi_\Gamma^- + \psi_\Gamma^+) \qquad \text{(۱۵- ب)}$$

1- Traces

در پایان فضای گالرکین‌ناپیوسته به‌صورت $\mathcal{V}_h^p = \{v \in L^2(\Omega): v|_E \in P_p(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}_h\}$ در نظر گرفته می‌شود که به فضای سوبولوف $\mathcal{H}^s(\mathcal{E}_h)$ ($s \geq 1$) تعلق دارد. در اینجا $P_p(E)$ به‌عنوان فضای چندجمله‌ای‌هایی با مرتبه کل کوچک‌تر مساوی p است و متناظر با آن p_h و p_c به‌ترتیب به‌عنوان مرتبه کل چندجمله‌ای‌های تقریب مربوط به بار هیدرولیکی (h) و کسر جرمی غلظت (C) شناخته می‌شوند.

فرم ضعیف معادلات حاکم: با ضرب معادلات دیفرانسیل (۱) و (۵) در توابع آزمون متناظر، سپس انتگرال‌گیری روی یک المان، استفاده از قضیه گرین، جمع روی تمامی المان‌های درون $\mathcal{E}_h$ و در نهایت با اعمال شرایط مرزی، فرم ضعیف مربوط به هر معادله به‌دست خواهد آمد. بنابراین فرض شود که v یک تابع آزمون متعلق به فضای $\mathcal{H}^s(\mathcal{E}_h)$ باشد. با ضرب آن در معادله (۱)، فرم ضعیف معادله جریان به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(S_0 \frac{\partial h}{\partial t}, v\right)_\Omega + \mathcal{A}(h, v; C) = \mathcal{L}_1(v; C) \qquad (۱۶)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(h, v; C) = &\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \mathrm{K}\nabla h \cdot \nabla v \\ &- \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^D} \int_\Gamma \langle \mathrm{K}\nabla h \cdot \mathrm{n}_\Gamma \rangle [\![v]\!] \\ &+ \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^D} \frac{\sigma_\Gamma^F}{|\Gamma|} \int_\Gamma [\![h]\!][\![v]\!]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(v; C) = &\int_\Omega \frac{\rho_R Q_R - \rho Q_P}{\rho_0} v \\ &- \int_\Omega \phi \beta_c \frac{\partial C}{\partial t} v \\ &+ \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \frac{\sigma_\Gamma^F}{|\Gamma|} \int_\Gamma v h_D v \\ &- \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \mathrm{K}\beta_c C \nabla z \cdot \nabla v \\ &+ \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^N} \int \frac{\rho}{\rho_0} v q_N \\ &+ \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^D} \int_\Gamma \langle \mathrm{K}\beta_c C \nabla z \cdot \mathrm{n}_\Gamma \rangle [\![v]\!]\end{aligned}$$

به‌طور مشابه با اعمال مجموعه شرایط مرزی (۱۳ و ١٤) و در نظر گرفتن $w \in \mathcal{H}^s(\mathcal{E}_h)$، فرم ضعیف معادله انتقال به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\left(\phi\rho\frac{\partial C}{\partial t}, w\right)_\Omega + \mathcal{B}_{\epsilon_T}(C, w; \mathrm{q}) = \mathcal{L}_2(w; \mathrm{q}) \quad (۱۷)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\epsilon_T}(C, w; \mathrm{q}) = &\sum_{E\in\mathcal{E}_h}\int_E \phi\rho \mathrm{D}\nabla C\cdot\nabla w - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I\cup\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma \langle\phi\rho\mathrm{D}\nabla C\cdot \mathrm{n}_\Gamma\rangle [\![w]\!] + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I\cup\mathcal{F}_h^D}\frac{\sigma_\Gamma^T}{|\Gamma|}\int_\Gamma [\![C]\!][\![w]\!] \\ &- \sum_{E\in\mathcal{E}_h}\int_E \rho C\mathrm{q}\cdot\nabla w + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma\langle\rho\mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma\rangle C^{\mathrm{UP}}[\![w]\!] + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N\cup\mathcal{F}_h^D\cap\mathcal{F}_h^{out}}\int_\Gamma \rho\mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma C w\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2(w; \mathrm{q}) = \int_\Omega(\rho_R C_R Q_R - \rho C Q_P)w + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D\cap\mathcal{F}_h^{in}}\int_\Gamma \rho_D C_D\mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma w + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D}\frac{\sigma_\Gamma^T}{|\Gamma|}\int_\Gamma w C_D$$

که در آن، $\sigma_\Gamma \geq 0$ پارامتر ثابت پنالتی است. مقدار کسر جرمی در مرز المان‌ها به‌صورت بادسو[1] محاسبه می‌شود:

$$C^{\mathrm{UP}} = \begin{cases} C|_{E_\Gamma^-} & \text{if } \mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma \geq 0 \\ C|_{E_\Gamma^+} & \text{if } \mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma < 0\end{cases} \quad \forall\Gamma\in\mathcal{F}_h^I \quad (۱۸)$$

که در آن‌ها، روش DG به‌کار گرفته شده IIPG نامیده می‌شود (جزئیات بیش‌تر در ۱۳، ١٤ و منابعی که به آن ارجاع شده است). قابل ذکر است که روش‌های IIPG به‌ازای مقادیر باندازه کافی بزرگ σ_Γ، پایدار[2] و همگرا[3] خواهد بود (۲٤).

گسسته‌سازی مکانی و زمانی: با محدود کردن فرم ضعیف معادلات به فضای ابعادی محدود[4] یعنی $(\tilde{h}, \tilde{C}): (0,T) \to \mathcal{V}_h^{p_h}\times\mathcal{V}_h^{p_c}$، حاصل کار فرمول‌بندی گالرکین‌ناپیوسته خواهد بود. بنابراین با جایگزینی تقریب‌های $\tilde{h}$ و $\tilde{C}$ درون رابطه‌های ١٦ و ۱۷ سیستم نیمه‌گسسته معادلات به‌صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\forall v\in\mathcal{V}_h^{p_h},\ \left(S_0\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t}, v\right)_\Omega + \mathcal{A}_{\varepsilon_F}(\tilde{h}, v; \tilde{C}) = \mathcal{L}_1(v; \tilde{C}) \quad (۱۹)$$

$$\forall w\in\mathcal{V}_h^{p_c},\ \left(\frac{\partial(\phi\rho\tilde{C})}{\partial t}, w\right)_\Omega + \mathcal{B}_{\varepsilon_T}(\tilde{C}, w; \tilde{\mathrm{q}}) = \mathcal{L}_2(w; \tilde{\mathrm{q}}) \quad (۲۰)$$

که در رابطه‌های بالا داریم:

$$\tilde{h} = \sum_{j=1}^{Dof_G} h_j(t)\phi_j(\mathrm{x}),\quad \phi_j(\mathrm{x}) = \begin{cases}\Phi_j^E(\mathrm{x}) & \mathrm{x}\in E\\ 0 & \mathrm{x}\notin E\end{cases} \quad (۲۱)$$

$$\tilde{C} = \sum_{j=1}^{Dof_G} C_j(t)\psi_j(\mathrm{x}),\quad \psi_j(\mathrm{x}) = \begin{cases}\Psi_j^E(\mathrm{x}) & \mathrm{x}\in E\\ 0 & \mathrm{x}\notin E\end{cases} \quad (۲۲)$$

$$\tilde{\mathrm{q}} = -\frac{\mu_0}{\mu(\tilde{C})}\mathrm{K}_0\left(\nabla\tilde{h} + \beta_c\tilde{C}\nabla z\right) \quad (۲۳)$$

1- Upwind
2- Stable
3- Convergent
4- Finite dimensional spaces

در این مرحله با گسسته‌سازی زمانی معادلات، سیستم گسسته کامل به‌دست می‌آید. در این‌جا از روش کاملاً ضمنی تفاضل محدود برای گسسته‌سازی هر جفت معادلات استفاده شده است. بنابراین معادلات گسسته شده کامل رابطه‌های ۱۹ و ۲۰ به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\left(S_0\frac{\tilde{h}^{n+1}-\tilde{h}^{n}}{\Delta t}, v\right)_{\Omega} + \mathcal{A}_{\varepsilon_F}\left(\tilde{h}^{n+1}, v; \tilde{C}^{n+1}\right) = \mathcal{L}_1\left(v; \tilde{C}^{n+1}\right) \quad (۲٤)$$

$$\left(\phi\rho^{n+1}\frac{\tilde{C}^{n+1}-\tilde{C}^{n}}{\Delta t}, w\right)_{\Omega} + \mathcal{B}_{\varepsilon_T}\left(\tilde{C}^{n+1}, w; \tilde{\mathrm{q}}^{n+1}\right) = \mathcal{L}_2\left(w; \tilde{\mathrm{q}}^{n+1}\right) \quad (۲۵)$$

بالانویس n مقدار متغیر را در گام زمانی t^n نشان می‌دهد و $n+1$ مقدار متغیر در گام زمانی t^{n+1} است.

برای از بین بردن نوسانات غیرفیزیکی به‌خصوص در مسائل همرفت غالب، در این پژوهش از محدودکننده شیب چاونت- جافری استفاده گردید (۱۱). این محدودکننده علاوه بر این‌که بقاء محلی روش را حفظ می‌کند، با استفاده از مینیمم کردن فاصله مقادیر بعد و قبل از اعمال محدودکننده تا حد امکان مقادیر اولیه را حفظ می‌نماید (۱٤).

روش حل معادلات گسسته‌شده: گام نهایی، حل معادلات گسسته‌شده (۲۷) و (۲۸) می‌باشد که در این‌جا از روش تکراری پیکارد[1] برای خطی‌سازی معادلات غیرخطی استفاده شده است (۲۳). این روش برای حل دستگاه‌های مذکور مناسب است زیرا اولاً غیرخطی بودن معادله جریان خیلی قوی نیست و ثانیاً این روش نسبت به روش‌های دیگری هم‌چون نیوتون هزینه محاسباتی کم‌تری دارد. فرایند کلی حل بواسطه این روش به‌گونه‌ای است که در هر گام زمانی، هر یک از معادلات گسسته شده فوق به‌طور جداگانه و پشت سرهم حل می‌شود تا این‌که معیار همگرایی فرا برسد. این روش شامل مراحل زیر است:

۱. با استفاده از $h^{n+1,l}$ و $C^{n+1,l}$ از تکرار قبلی و به‌عنوان حدس اولیه، $h^{n+1,l+1}$ در تکرار $l+1$ محاسبه می‌شود.

۲. محاسبه سرعت دارسی با استفاده از $h^{n+1,l+1}$ و $C^{n+1,l}$.

۳. حل معادله انتقال براساس $h^{n+1,l+1}$ و سرعت دارسی در مرحله قبل و در نتیجه محاسبه $C^{n+1,l+1}$.

٤. بررسی معیار توقف (میزان تلورانس قابل‌قبول). اگر این معیار تامین شود، این چرخه برای گام زمانی بعدی تکرار خواهد شد و در غیر این صورت تکرار بعدی برای گام زمانی جاری از مرحله ۱ شروع می‌شود.

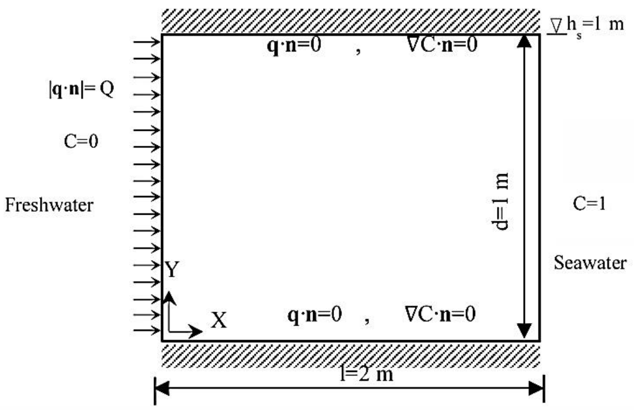
در اینجا برای حل هر یک از دستگاه‌ها در مرحله ۱ و ۳ از روش مستقیم حذفی گاوس و ماتریس‌های تنک[2] استفاده شده است. برای حل معادلات مذکور برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار متلب[3] انجام شد.

مسأله هنری[4]: مسأله هنری به همراه مسأله الدر از پرکاربردترین مسائل تست مدل‌های وابسته به چگالی هستند. هنری (۱۹٦٤) اولین محققی بود که توانست فرایند پیشروی آب شور دریا را با در نظر گرفتن چگالی متغیر مدل‌سازی کند. او از یک مدل ساده دوبعدی در مقطع عمودی که متشکل از یک آبخوان همگن مستطیلی شکل است برای این منظور استفاده نمود. او برای این مدل یک حل نیمه‌تحلیلی بر مبنای سری‌های فوریه دوگانه[5] ارائه کرد. به‌خاطر وجود حل

1- Picard iterative method

2- Sparse matrix
3- MATLAB
4- Henry problem
5- Double Fourier series

نیمه‌تحلیلی برای این مسأله پژوهشگران بسیاری از آن به‌عنوان یک مسأله برای محک زدن مدل‌های وابسته به چگالی استفاده کردند. شکل ۱ موقعیت آبخوان را نشان می‌دهد که از سمت چپ با آب شیرین زیرزمینی با نرخ Q تغذیه می‌شود و از سمت راست به آب دریا منتهی می‌شود. آب شور از سمت دریا به‌سمت آبخوان هجوم می‌آورد و تا جایی پیش می‌رود تا به تعادل با تغذیه آب شیرین زیرزمینی برسد. در این پژوهش از مسأله استاندارد هنری و دو مورد اصلاح شده آن برای صحت‌سنجی مدل استفاده شده است. جدول ۱ شامل داده‌ها و پارامترهای ورودی برای مسأله هنری است. تنها تفاوت حالت استاندارد و اصلاح‌شده‌ها در آن است که در مسأله اصلاح‌شده اول تنها نرخ تغذیه آب شیرین زیرزمینی نسبت به حالت استاندارد نصف شده و در مسأله اصلاح‌شده دوم تنها پخشیدگی ملکولی نسبت به حالت استاندارد ۲۰ برابر کوچک‌تر شده است. در اینجا برای مقایسه از حل‌های نیمه‌تحلیلی ارائه شده در (۲۷، ۳۲ و ۳۳) به‌ترتیب برای مورد استاندارد، اصلاح‌شده اول و اصلاح‌شده دوم استفاده شده است.



شکل ۱- هندسه و شرایط مرزی مسأله هنری.

Figure 1. Geometry and boundary conditions for Henry problem.

جدول ۱- پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی مسأله استاندارد هنری.

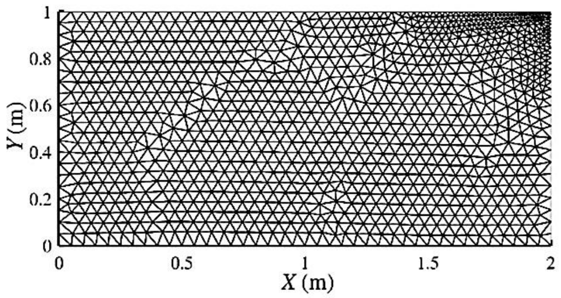
Table 1. Input parameters for simulation of the standard Henry problems.

واحد Unit	مقدار Value	پارامتر Parameter
ms^{-1}	$0.01\times I^{*}$	K
m	0	α_L
m	0	α_T
m^{-1}	0	S_0
-	0.35	ϕ
kgm^{-3}	1000	ρ_0
kgm^{-3}	1025	ρ_s
-	0	C_0
m^2s^{-1}	6.6×10^{-6}	Q
$kgm^{-1}s^{-1}$	0.001	μ_0
-	0.025	β_c
-	0.0	β_μ

به‌منظور حل مسأله استاندارد و مورد اصلاح‌شده اول، دامنه حل به ۲۱۷۲ المان مثلثی بی‌سازمان[1] غیریکنواخت (شکل ۲) تقسیم‌بندی شد. برای حل مسأله اصلاح‌شده دوم از یک شبکه یکنواخت متشکل از ۱۲۸۰۰ المان مثلثی استفاده گردید. طول دوره شبیه‌سازی برای مسأله استاندارد، اصلاح‌شده اول و اصلاح‌شده دوم به‌ترتیب ۴۰۰، ۶۰۰ و ۱۰۰۰ دقیقه انتخاب شد، که مبنای این انتخاب شرایط رسیدن به جریان ماندگار[2] بوده است. گام‌های زمانی برای هر سه حالت از ۱۰ ثانیه شروع شده و هر گام نسبت به گام قبلی به‌صورت تدریجی تا حداکثر ٦۰۰ ثانیه تغییر پیدا نمود.

مسأله شوری الدر[3]: از آن‌جا که مسأله قبل یک مسأله با تفاوت چگالی کم میان آب شور و شیرین بود، لازم است که علاوه بر این، مدل روی یک مسأله با تفاوت چگالی نسبتاً زیاد همانند مسأله الدر نیز ارزیابی گردد. مسأله شوری الدر در اصل توسط ووس و سوزا (۱۹۸۷) بر اساس مدل حرارتی آن توسط الدر (۱۹٦۷) مدل‌سازی شد. سیمپسون و سلمنت (۲۸) در پژوهشی روی مسأله الدر و هنری، بیان کردند که مسأله الدر در ارزیابی مدل‌های وابسته به چگالی قابلیت بهتری را از خود نشان می‌دهد هر چند برای این مسأله حل تحلیلی وجود ندارد.

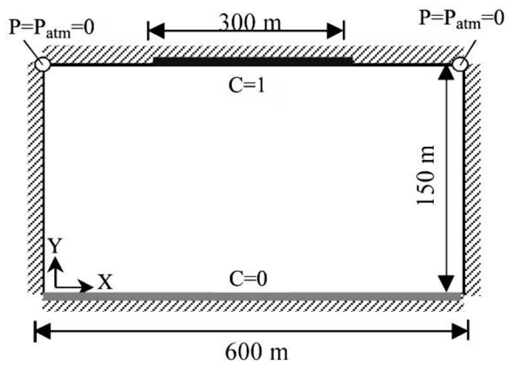
نتایج حاصل از حل‌های عددی این مسأله حل واحدی را نشان نمی‌دهد و تاکنون جواب‌های متفاوتی برای آن به‌دست آمده است. به همین منظور ارزیابی نتایج حاصل بیش‌تر به‌صورت کیفی صورت می‌گیرد. بنابراین تنها باید بررسی نمود که آیا مدل توانسته است جنبه‌های مهم حل (مانند تعداد لوب‌های تشکیل شده و الگوی کلی جریان و نیمرخ‌های به‌وجود آمده) را تسخیر نماید یا خیر. مسأله الدر شامل یک آبخوان مستطیلی شکل محصور با ابعاد ۱۵۰×٦۰۰ متر می‌باشد که در دو گوشه بالای سمت راست و چپ آن یک فشار ثابت صفر اعمال شده است (شکل ۳). آبخوان همگن و همسان بوده و تمامی مرزهای آن نفوذناپذیر است. در قسمت وسطی بالای دامنه سیالی با چگالی بالا (منبع شوری) بر روی سیال سبک‌تر (آب) قرار گرفته است که این باعث به‌وجود آمدن ناپایداری‌هایی به شکل انگشته[4] در طول دامنه خواهد شد. معمولاً از عدد بی‌بعد ریلی[5] (Ra) برای تعیین وضعیت ناپایداری در مسائل همرفت آزادی هم‌چون مسأله الدر (Ra=٤۰۰) استفاده می‌شود.



شکل ۲- المان‌بندی بی‌سازمان مسأله هنری با استفاده از ۲۱۷۲ المان و ۱۱٦٤ گره.

Figure 2. An unstructured mesh used for Henry problem with 2172 elements and 1164 nodes.

1- Unstructured mesh
2- Steady state conditions
3- Elder problem
4- Fingering
5- Rayleigh Number



شکل ۳- هندسه و شرایط مرزی مسأله الدر.

Figure 3. Geometry and boundary conditions for the saline Elder problem.

برای حل این مسأله به‌خاطر متقارن بودن مسأله تنها نیمه سمت چپ آن مورد مدل‌سازی قرار گرفت. برای همین منظور از یک شبکه ریزیکنواخت برای حل این مسأله بهره گرفته شد. شبکه ریز متشکل از ٦٦۰۰ المان مثلثی می‌باشد. گام‌های زمانی مورد استفاده برای این مسأله به‌صورت یکنواخت و برابر ۷/۵ روز بوده است. سایر پارامترهای مورد نیاز در جدول ۲ ارائه شده است.

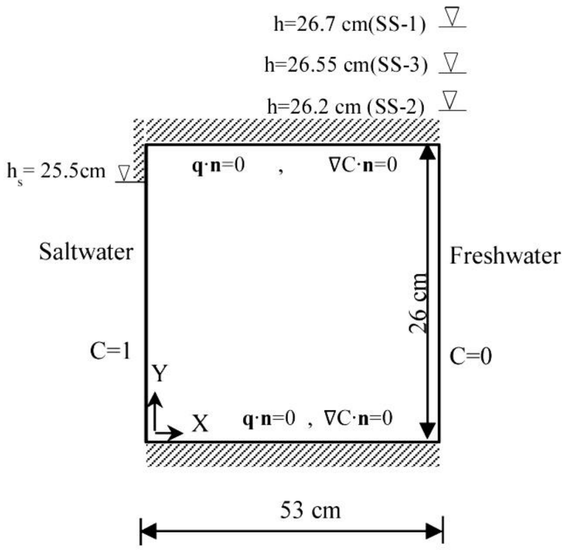
جدول ۲- پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی مسأله الدر.

Table 2. Input parameters for simulation of Elder problem.

واحد Unit	مقدار Value	پارامتر Parameter
ms^{-1}	$4.75\times10^{-6}\times I$	K
	3.565×10^{-6}	D_m
m	0	α_L
m	0	α_T
m^{-1}	0	S_0
-	0.1	ϕ
kgm^{-3}	1000	ρ_0
kgm^{-3}	1200	ρ_s
-	0	C_0
$kgm^{-1}s^{-1}$	0.001	μ_0
-	0	β_μ
-	0.2	β_c

مسأله آزمایشگاهی گاسوامی- سلمنت: مسأله آزمایشگاهی گاسوامی- سلمنت (۹) به‌منظور ارزیابی و صحت‌سنجی مدل‌های آب زیرزمینی وابسته به چگالی طراحی شد. این مسأله از یک جعبه مستطیلی شکل شامل سه محفظه تشکلیل شده است. محفظه وسطی شامل محیط متخلخل همگن و همسان بوده و یک آبخوان آزاد را به‌وجود می‌آورد، در حالی‌که محفظه سمت چپ شامل آب شور و محفظه سمت راست شامل آب شیرین است. این آزمایش شامل هر دو آزمایش ماندگار و غیرماندگار و متشکل از سه فاز کاملاً مجزا است. فاز اول با تنظیم بار هیدرولیکی آب شیرین سمت راست روی ۲٦/۷ سانتی‌متر و تنظیم بار هیدرولیکی آب شور روی ۲۵/۵ سانتی‌متر انجام گرفت. تحت این شرایط وقتی اولین حالت ماندگار (SS–۱) با ثابت ماندن گوه پیشرو آب شور تشکیل گردید (فاز اولیه)، بار هیدرولیکی آب شیرین سمت راست به‌طور ناگهانی روی مقدار ۲٦/۲ سانتی‌متر افت داده شد و تا زمانی که شرایط ماندگار (SS–۲) برقرار گردد، روی همین مقدار ثابت نگه داشته شد (فاز پیشروی آب شور). در نهایت با افزایش بار هیدرولیکی آب شیرین سمت راست به‌میزان ۲٦/۵۵ سانتی‌متر و نگهداشتن آن روی همین مقدار، شرایط ماندگار (SS–۳) برای این حالت نیز پدید آمد (فاز پسروی آب شور).

علاوه بر اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی، گاسوامی و سلمنت یک مدل عددی برای این آزمایش‌ها توسعه دادند. شکل ٤ مدل عددی و شرایط مرزی حاکم مورد استفاده آن‌ها را نشان می‌دهد. سایر پارامترهای مورد نیاز مدل‌سازی در جدول ۳ آورده شده است. آن‌ها برای مقایسه نتایج مدل عددی با آزمایشگاهی مبنای خود را خط هم‌شوری ۰/۵ به‌عنوان موقعیت جبهه گوه آب شور فرار دادند. در این‌جا دامنه این مسأله با ۱۱۰۲٤ المان مثلثی یکنواخت منقطع گردید و از گام‌های زمانی مساوی یک‌ثانیه‌ای برای شبیه‌سازی استفاده شد.



شکل ٤- هندسه و شرایط مرزی مربوط به مسأله گاسوامی- سلمنت.

Figure 4. Geometry and boundary conditions for Goswami-Clement experimental setup.

جدول ۳- پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی مسأله گاسوامی- سلمنت.
Table 3. Input parameters for simulation of Goswami-Clement experimental setup.

واحد Unit	مقدار Value	پارامتر Parameter
ms^{-1}	$0.0122\times I$	K
m^2s^{-1}	1×10^{-9}	D_m
m	0.001	α_L
m	0.0001	$_T\alpha$
m^{-1}	1×10^{-5}	S_0
-	0.385	ϕ
kgm^{-3}	1000	ρ_0
kgm^{-3}	1026	ρ_s
-	0	C_0
$kgm^{-1}s^{-1}$	0.001	μ_0
-	0.026	β_c

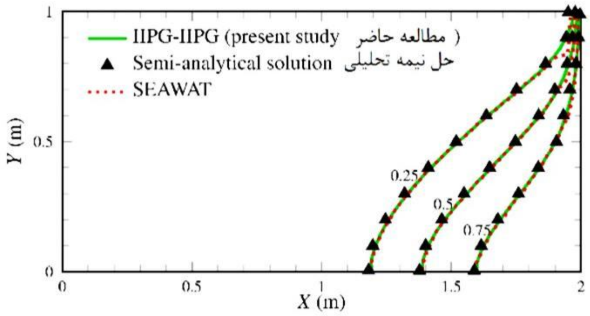
نتایج و بحث

در شکل‌های ۵ تا ۷ نتایج حاصل از حل سه مسأله هنری در مقایسه با حل نیمه‌تحلیلی قابل مشاهده است. با مقایسه حل عددی با حل تحلیلی، مشاهده می‌شود که برای هر سه مورد تطابق خوبی بین آن‌ها برقرار است. جدول ٤ مجذور میانگین مربعات خطا ($\mathrm{RMSE}=\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}(C_i^{semi}-C_i^{DG})^2/n}$، که C_i^{DG} مقدار شوری محاسبه شده با استفاده از مدل حاضر و C_i^{semi} مقدار شوری محاسبه شده با استفاده از حل نیمه‌تحلیلی است که برابر یکی از سه مقدار ۰/۲۵، ۰/۵۰ و ۰/۷۵ می‌باشد و n تعداد نقاطی است که در آن حل نیمه‌تحلیلی معلوم است) را نسبت به حل نیمه‌تحلیلی برای مدل حاضر نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر کمی RMSE نیز نشان‌دهنده خطای بسیار کم مدل حاضر در مقایسه با حل نیمه‌تحلیلی می‌باشد. کم‌ترین خطا مربوط به خط هم‌شوری ۰/۲۵ در مسأله دوم و خط هم‌شوری ۰/۷۵ در مسأله سوم می‌باشد. این موضوع در شکل‌های ۵ تا ۷ نیز قابل مشاهده است.

علاوه بر این، مورد استاندارد و اصلاح‌شده اول با نتایج حاصل از SEAWAT (۱۷) نیز مقایسه شد. در شکل‌های ۵ و ٦ مشاهده می‌شود که در خطوط هم‌شوری حاصل از SEAWAT بر خلاف مدل حاضر، در گوشه بالای سمت راست دامنه (قسمت خروجی جریان) انحراف و نوساناتی وجود دارد. در واقع در آن ناحیه به‌دلیل سرعت بالای جریان، انتقال شوری غالباً ناشی از همرفت است. به‌همین خاطر روش‌های عددی استاندارد و معمول در این نواحی، نوسانات غیرفیزیکی از خود بروز می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نتایج حاصل از گالرکین‌ناپیوسته هیچ‌گونه نوسانی وجود ندارد.

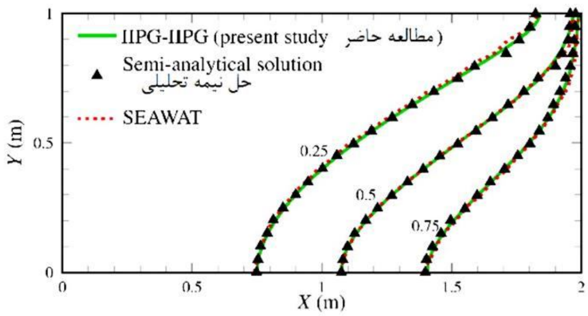
اما هدف از ارائه مسأله سوم هنری نشان دادن قابلیت گالرکین‌ناپیوسته در برابر پخش عددی است. این مسأله به‌گونه‌ای طراحی شده است که روش‌های عددی که نسبت به پخش عددی حساس باشند، خود را نشان می‌دهند. این موضوع قبلاً توسط یونس و فاهس (۲۰۱٤) در مورد گالرکین‌ناپیوسته و FVM مورد پژوهش قرار گرفت و آن‌ها نشان دادند نسخه‌ای

از کد که ترکیب گالرکین‌ناپیوسته را شامل می‌شود (در آن‌جا برای مقایسه تنها ترم همرفت معادله انتقال با استفاده از گالرکین‌پیوسته و احجام محدود منقطع‌سازی شد)، پخش عددی خیلی کمی از خود بروز می‌دهد. علاوه بر این، آن‌ها بیان کردند که برای این مسأله نتایج غیرقابل رضایتی برای نسخه‌ای از کد که دربردارنده FVM است، حاصل شده است. نتایج ارائه شده از مدل حاضر در شکل ۷ تأیید دیگری بر تمایل کم‌تر روش گالرکین‌ناپیوسته به پخش عددی می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تطابق خیلی خوبی بین نتایج حاصل از مدل حاضر و حل نیمه‌تحلیلی به‌دست آمده است.



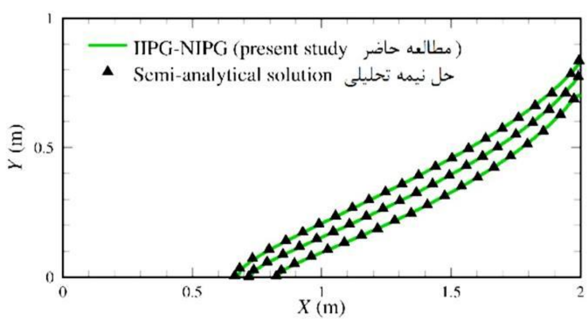
شکل ۵- مقایسه نتایج حاصل از مدل با حل نیمه‌تحلیلی و نتایج حاصل از SEAWAT برای مسأله استاندارد هنری.

Figure 5. Numerical results in comparison with semi-analytical and SEAWAT solutions for standard Henry problem.



شکل ٦- مقایسه نتایج حاصل از مدل با حل نیمه‌تحلیلی و نتایج حاصل از SEAWAT برای مسأله استاندارد هنری.

Figure 6. Numerical results in comparison with semi-analytical and SEAWAT solutions for first modified Henry problem.



شکل ۷- مقایسه نتایج حاصل از مدل با حل نیمه‌تحلیلی برای دومین مسأله اصلاح‌شده هنری.

Figure 7. Numerical results in comparison with semi-analytical solution for second modified Henry problem.

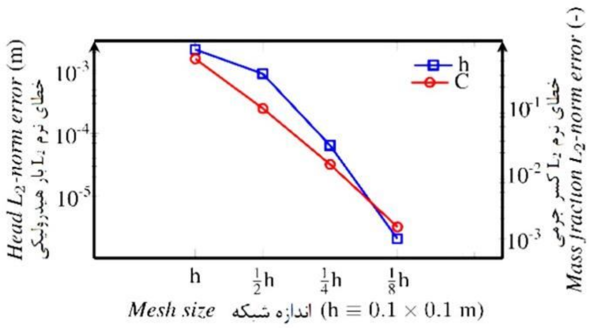
جدول ٤- محاسبه خطای RMSE در مسائل هنری برای خطوط هم‌شوری ۰/۲۵، ۰/۵۰ و ۰/۷۵.
Table 4. Calculation of RMSE in Henry problems for 0.25, 0.50 and 0.75 isochlors.

مسأله	خط هم‌شوری Isochlor		
	0.25	0.5	0.75
مورد ۱ Case 1	0.032	0.069	0.038
مورد ۲ Case 2	0.006	0.022	0.047
مورد ۳ Case 3	0.028	0.012	0.006

در این قسمت برای بررسی همگرایی حل نسبت به کوچک شدن اندازه شبکه، از مسأله استاندارد هنری استفاده شده است. برای این منظور از یک شبکه درشت یکنواخت متشکل از ٤۰۰ المان مثلثی که تا چهار مرتبه ریز شده است (هر مثلث در هر مرتبه ریزسازی با نصف کردن اضلاع مثلث به چهار مثلث تبدیل می‌شود)، استفاده گردید. به‌خاطر این‌که حل دقیق مسأله روی کل دامنه وجود ندارد، حل به‌دست آمده برای ریزترین شبکه مبنای مقایسات قرار گرفت. ریزترین شبکه متشکل از ۱۰۲٤۰۰ المان مثلثی است. میزان خطای نرم L_2 حاصل از شبیه‌سازی به‌ازای هر یک از شبکه‌های درشت‌تر، از تصویر کردن حل حاصل بر روی ریزترین شبکه محاسبه گردید تا روند کاهش خطا و همگرایی به‌سمت حل مبنا بررسی گردد. در شکل ۸ روند همگرایی حل برای هر دو متغیر h و C نمایش داده شده است. نتایج بیانگر آن است که با هر بار نصف کردن اندازه شبکه میزان خطا کم‌تر و شیب کاهشی خطا افزایش می‌یابد.

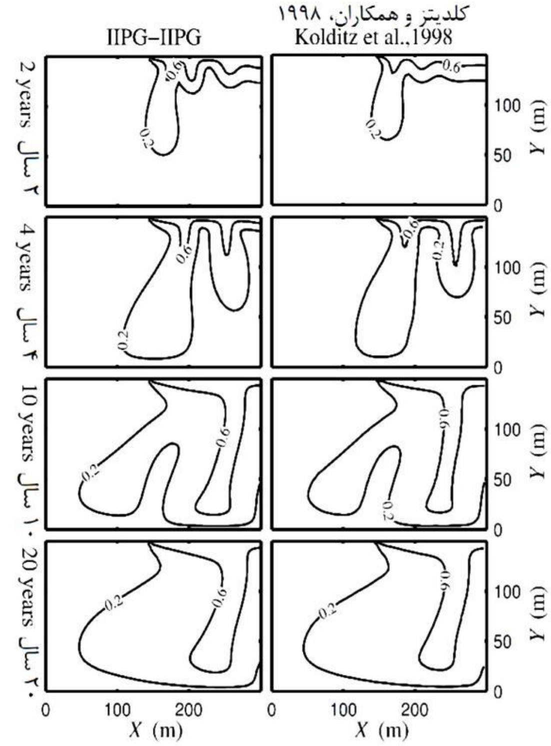
شکل ۹ نتایج حاصل از شبیه‌سازی مسأله الدر را در چهار مقطع زمانی ۲، ٤، ۱۰، ۲۰ سال نشان می‌دهد. از آن‌جا که برای این مسأله حل دقیق وجود ندارد، نتایج به‌دست آمده با نتایج ROCKFLOW (یک مدل اجزاء محدود بر اساس المان مثلثی) (۱٦) مقایسه شد. دلیل این مقایسه این بود که شباهت زیادی بین نتایج مدل حاضر و ROCKFLOW وجود داشت.

عوامل مختلفی وجود دارد که منجر به تولید نیمرخ‌های متفاوتی برای این مسأله می‌شود. از جمله این‌ها خود روش عددی، نوع متغیر وابسته (غلظت یا کسر جرمی) و نوع المان می‌باشد (۳۱). از آن‌جا که مدل ارائه شده در این پژوهش و ROCKFLOW هر دو از المان مثلثی و از معادله انتقال براساس کسر جرمی بهره برده‌اند، می‌تواند دلیلی برای شباهت میان نتایج آن‌ها باشد. در شکل ۹ به مقایسه میان نتایج هر دو مدل پرداخته شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود شباهت زیادی را می‌توان بین آن‌ها مشاهده نمود که این خود دلیلی بر صحت نتایج حاصل از مدل تهیه شده در این پژوهش می‌باشد.



شکل ۸- نحوه کاهش خطای نرم L2 برای متغیرهای h و C با ریز کردن شبکه (برای مسأله استاندارد هنری).

Figure 8. Decreasing L2-norm error for h and C with refining the mesh (for standard Henry problem).

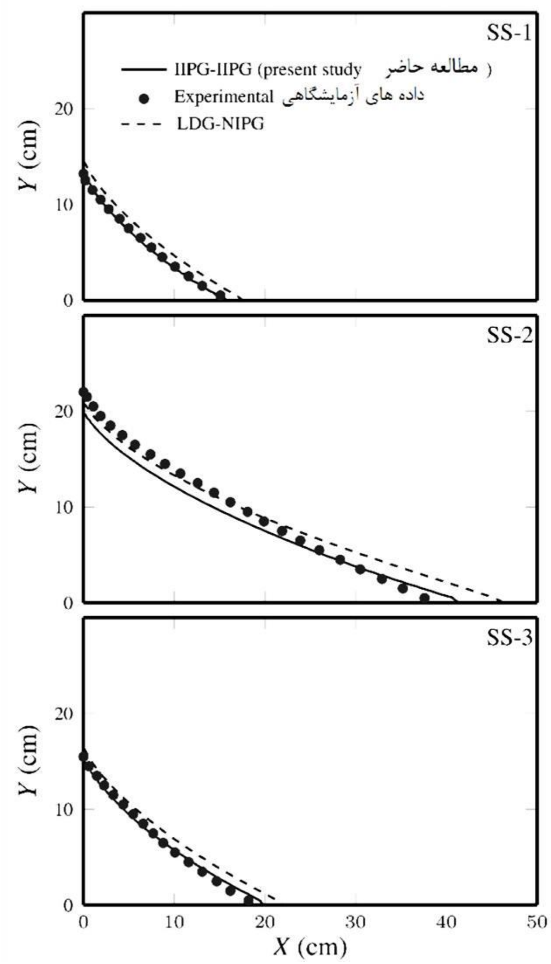


شکل ۹- مقایسه خطوط هم‌شوری حاصل از مدل در مقایسه با نتایج شبیه‌ساز ROCKFLOW در نیمه چپ مسأله الدر.

Figure 9. Isochlors resulted from the present model (left) in comparison with those of ROCKFLOW simulator (right) for the left half of Elder problem.

در مسأله آزمایشگاهی گاسوامی- سلمنت نتایج حاصل در حالت ماندگار با اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی در شکل ۱۰ مقایسه شده است. در اینجا برای مقایسه، نتایج حاصل از LDG-NIPG (۲۲) نیز اضافه گردید. همان‌طور که مشاهده می‌شود مدل حاضر توانسته است تقریب بهتری از میزان پیشروی آب شور و موقعیت گوه آب شور (به‌خصوص پنجه آن) ارائه دهد. مقدار خطای RMSE برای هر سه فاز محاسبه گردید که مقادیر آن به‌ترتیب ۰/۱۴، ۰/۴٤ و ۰/۳٤ به‌دست آمد. این مقادیر با آن‌چه که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود کاملاً هم‌خوانی دارد و کم‌ترین مقدار خطا را برای فاز اولیه حاصل شد. مشاهده می‌شود که

با اندکی اختلاف ظاهری میان نتایج، مقادیر کمی RMSE اختلاف زیادی را بروز می‌دهد. این موضوع به این دلیل است که ناحیه اختلاط آب شور و شیرین (حد فاصل میان آب شور و شیرین) بسیار کوچک است و اندکی انحراف سبب بروز خطای زیاد در محاسبات RMSE می‌شود.



شکل ۱۰- نتایج حاصل از شبیه‌سازی مسأله آزمایشگاهی در حالت ماندگار در قیاس با داده‌های آزمایشگاهی و نتایج عددی LDG-NIPG.

Figure 10. Goswami-Clement experimental problem: numerical results in comparison with the experimental data and LDG-NIPG solutions for the steady state conditions.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک مدل عددی بر مبنای گالرکین‌ناپیوسته برای منقطع‌سازی هر دو معادله جریان و انتقال شوری در جریان‌های وابسته به چگالی توسعه داده شد. برای معادله انتقال، مدل برای شرط مرزی نیومن- دیریشله توسعه داده شد. به‌دلیل ظاهر شدن نوسانات غیرفیزیکی در مسأله آزمایشگاهی از محدودکننده شیب چاونت- جافری که خود حفظ‌کننده بقاء محلی است، استفاده گردید. سپس از روش پیکارد برای خطی‌سازی معادلات غیرخطی استفاده شد. با وجود هزینه محاسباتی بالای گالرکین‌ناپیوسته در مقایسه با روش‌های عددی

همچون گالرکین‌پیوسته، در این پژوهش از تعداد بسیار زیادی المان برای شبیه‌سازی‌ها استفاده شد.

برای ارزیابی مدل تهیه شده بر پایه گالرکین‌ناپیوسته، تحلیل کاملی در قالب پنج مسأله ارائه شد. در شبیه‌سازی مسأله هنری دقت مدل در مقابل حل نیمه‌تحلیلی و SEAWAT مورد ارزیابی قرار گرفت، که نتایج حاصل بیانگر دقت بسیار بالای مدل بود. علاوه بر این نشان داده شد که مدل توانایی مناسبی در شبیه‌سازی دومین مسأله اصلاح‌شده هنری که حساس‌تر به پخش عددی است، دارد. در مسأله الدر نتایج در مقابل مدل عددی ROCKFLOW به‌صورت کیفی مقایسه شد که دلیل آن نیمرخ‌های گوناگون به‌دست آمده برای این مسأله است. مقایسه‌ها نشان داد که مدل به‌خوبی توانسته است جنبه‌های مهم این مسأله را هم‌چون تعداد لوب‌های به‌وجود آمده و یا الگوی جریان را پیش‌بینی نماید. در نهایت برای ارزیابی مدل از یک مدل آزمایشگاهی استفاده شد که مقایسه‌ها دقت نسبتاً مناسبی را برای مدل نشان داد.

با توجه به این‌که روش‌های گالرکین‌ناپیوسته قدرت بالایی در تسخیر شوک‌ها و ناهمگنی‌ها دارند، گام بعدی این پژوهش ارزیابی روش‌های گالرکین‌ناپیوسته در مقابل ناهمگنی‌ها در مسائل وابسته به چگالی می‌باشد.

منابع

1.Abarca, E., Carrera, J., Sánchez-Vila, X., and Dentz, M. 2007. Anisotropic dispersive Henry problem. Advances in Water Resources. 30: 4. 913-926.

2.Ackerer, P. 2004. A new coupling algorithm for density-driven flow in porous media. Geophysical Research Letters. 31: 12. 12506.

3.Bear, J. 1999. Seawater Intrusion in Coastal Aquifers. Springer Science & Business Media.

4.Croucher, A.E., and O'Sullivan, M.J. 1995. The Henry Problem for Saltwater Intrusion. Water Resources Research. 31: 7. 1809-1814.

5.Diersch, H.J. 1988. Finite element modelling of recirculating density-driven saltwater intrusion processes in groundwater. Advances in Water Resources. 11: 1. 25-43.

6.Diersch, H.J.G., and Kolditz, O. 2002. Variable-density flow and transport in porous media: approaches and challenges. Advances in Water Resources. 25: 8-12. 899-944.

7.Frolkovic, P. 1998. Consistent velocity approximation for density driven flow and transport. P 603-11, In: R. Van Keer (Ed.), Advanced computational methods in engineering, Part 2. Maastrich: Shaker Publishing.

8.Frolkovič, P., and De Schepper, H. 2001. Numerical modelling of convection dominated transport coupled with density driven flow in porous media. Advances in Water Resources. 24: 1. 63-72.

9.Goswami, R.R., and Clement, T.P. 2007. Laboratory-scale investigation of saltwater intrusion dynamics. Water Resources Research. 43: 4. 1-11.

10.Guo, W., and Langevin, C.D. 2002. User's guide to SEAWAT; a computer program for simulation of three-dimensional variable-density ground-water flow.

11.Hoteit, H., Ackerer, P., Mose, R., Erhel, J., and Philippe, B. 2004. New two-dimensional slope limiters for discontinuous Galerkin methods on arbitrary meshes. Inter. J. Num. Meth. Engin. 61: 14. 2566-2593.

12.Huyakorn, P.S., Andersen, P.F., Mercer, J.W., and White, H.O. 1987. Saltwater intrusion in aquifers: Development and testing of a three-dimensional finite element model. Water Resources Research. 23: 2. 293-312.

13.Jamei, M., and Ghafouri, H. 2015. A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media using modified MLP slope limiter. Modares Mechanical Engineering. 15: 12. 326-336.

14.Jamei, M., and Ghafouri, H. 2016. A novel discontinuous Galerkin model for two-phase flow in porous media using an improved IMPES method. Inter. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow. 26: 1. 284-306.
15.Johannsen, K. 2003. On the Validity of the Boussinesq Approximation for the Elder Problem. Computational Geosciences. 7: 3. 169-182.
16.Kolditz, O., Ratke, R., Diersch, H.J.G., and Zielke, W. 1998. Coupled groundwater flow and transport: 1. Verification of variable density flow and transport models. Advances in Water Resources. 21: 1. 27-46.
17.Langevin, C.D., and Guo, W. 2006. MODFLOW/MT3DMS-based simulation of variable-density ground water flow and transport. Ground water. 44: 3. 339-51.
18.Mazzia, A., and Putti, M. 2002. Mixed-finite element and finite volume discretization for heavy brine simulations in groundwater. J. Com. Appl. Math. 147: 1. 191-213.
19.Oltean, C., and Buès, M.A. 2001. Coupled Groundwater Flow and Transport in Porous Media. A Conservative or Non-conservative Form? Transport in Porous Media. 44: 2. 219-246.
20.Oude Essink, G. 1998. MOC3D adapted to simulate 3D density-dependent groundwater flow. Proceedings of the MODFLOW'98 Conference, Pp: 291-303.
21.Pinder, G.F., and Cooper, H.H. 1970. A Numerical Technique for Calculating the Transient Position of the Saltwater Front. Water Resources Research. 6: 3. 875-882.
22.Povich, T.J. 2012. Discontinuous Galerkin (DG) methods for variable density groundwater flow and solute transport. J. Univ. Texas at Austin.
23.Putti, M., and Paniconi, C. 1995. Picard and Newton linearization for the coupled model for saltwater intrusion in aquifers. Advances in Water Resources. 18: 3. 159-170.
24.Rivière, B. 2008. Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations: theory and implementation, Society for Industrial and Applied Mathematics.
25.Segol, G., Pinder, G.F., and Gray, W.G. 1975. A Galerkin-finite element technique for calculating the transient position of the saltwater front. Water Resources Research. 11: 2. 343-347.
26.Simmons, C.T., Fenstemaker, T.R., and Sharp, J.M. 2001. Variable-density groundwater flow and solute transport in heterogeneous porous media: approaches, resolutions and future challenges. J. Cont. Hydrol. 52: 1-4. 245-275.
27.Simpson, M.J., and Clement, T.P. 2004. Improving the worthiness of the Henry problem as a benchmark for density-dependent groundwater flow models. Water Resources Research. 40: 1. 1-11.
28.Simpson, M.J., and Clement, T.P. 2003. Theoretical analysis of the worthiness of Henry and Elder problems as benchmarks of density-dependent groundwater flow models. Advances in Water Resources. 26: 1. 17-31.
29.Voss, C.I., Simmons, C.T., and Robinson, N.I. 2010. Three-dimensional benchmark for variable-density flow and transport simulation: matching semi-analytic stability modes for steady unstable convection in an inclined porous box. Hydrogeol. J. 18: 1. 5-23.
30.Voss, C.I., and Souza, W.R. 1987. Variable density flow and solute transport simulation of regional aquifers containing a narrow freshwater-saltwater transition zone. Water Resources Research. 23: 10. 1851-1866.
31.Woods, J.A., and Carey, G.F. 2007. Upwelling and downwelling behavior in the Elder-Voss-Souza benchmark. Water Resources Research. 43: 12. 1-12.
32.Younes, A., and Fahs, M. 2014. A semi-analytical solution for saltwater intrusion with a very narrow transition zone. Hydrogeol. J. 22: 2. 501-506.
33.Zidane, A., Younes, A., Huggenberger, P., and Zechner, E. 2012. The Henry semianalytical solution for saltwater intrusion with reduced dispersion. Water Resources Research. 48: 6. 1-10.

Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources

J. of Water and Soil Conservation, Vol. 24(4), 2017
http://jwsc.gau.ac.ir

A new numerical method based on discontinuous galerkin for simulation of seawater intrusion into coastal aquifers

***A. Raeisi[1], H.R. Ghafouri[2] and D. Rostamy[3]**
[1]Ph.D. Graduate, Dept. of Civil Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz,
[2]Professor, Dept. of Civil Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz,
[3]Professor, Dept. of Mathemathics, Imam Khomeini International University of Ghazvin
Received: 07/04/2016; Accepted: 12/11/2016

Abstract
Background and Objectives: Coastal aquifers are of the most important freshwater resources in many countries, especially in arid and semi-arid zones. Due to the proximity and contact with the sea and thus the threat of contamination because of the seawater intrusion, management and protection of these freshwater resources are quite necessary. Therefore, the main goal of the present study is to develop a new numerical model for simulation of the contaminant transport in coastal aquifers (seawater intrusion) using discontinuous Galerkin method.
Materials and Methods: In this study, Discontinuous Galerkin methods which have been less developed in engineering problems were applied for discretization of the coupled nonlinear system of flow and solute transport equations in a saturated porous medium and a fully implicit backward Euler scheme was applied for temporal discretization. The primal DGs have been developed successfully for density-dependent flows by applying initial and boundary conditions to the coupled equations. Then, to linearize the resulting nonlinear systems, Picard iterative technique was applied and Chavent-Jaffre slope limiter was used to eliminate the nonphysical oscillations appeared in the solution.
Results: Five benchmark problems including standard Henry problem together with its two modified versions, Elder problem and Goswami-Clement experimental problem in three distinct phases were simulated for validation and verification of the numerical code. For all the benchmark problems, the results were compared against other solutions in order to assess the model accuracy. The solution convergence was proved for the standard henry problem. Applying the Chavent-Jaffre slope limiter to the experimental test showed a satisfactory results obtained from the simulations. In comparison with other numerical solutions, the present model revealed a good accuracy for all the problems.
Conclusion: The DG model were verified and evaluated using the above-mentioned problems. The results from simulations showed a good accuracy for DG method. In portions of the domain where the velocity is high, it was indicated that the DG methods in comparison with other numerical methods e.g. finite difference, do not emerge non-physical oscillations. Also, the results show a less numerical dispersion in comparison with other numerical methods such as finite volume methods. In addition, simulating the experimental problem with the current model shows the practical aspects of the developed model based on discontinuous Galerkin.

Keywords: Discontinuous Galerkin, Density-dependent groundwater flow, Locally conservative, Seawater intrusion, Slope limiter

* Corresponding Author; Email: a-raeisi@phdstu.scu.ac.ir