



دانشگاه گیلان

نشریه پژوهش‌های حفاظت آب و خاک
جلد بیست و ششم، شماره دوم، ۱۳۹۸
۱-۲۷

<http://jwsc.gau.ac.ir>
DOI: 10.22069/jwsc.2019.15769.3096

ارائه مدل عددی گالرکین ناپیوسته IMPES برای مدل‌سازی آلاینده‌های زیرزمینی امتزاج‌ناپذیر با کمک روش لاکس-وندروف

* مهدی جامعی^۱، ایمان احمدیان‌فر^۲ و علی رئیسی عیسی‌آبادی^۳

^۱ استادیار دانشکده مهندسی، صنعتی شهدای هویزه، سوسنگرد، استادیار دانشکده مهندسی، دانشگاه صنعتی خاتم‌النبیاء بهبهان، بهبهان،
^۲ استادیار دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
تاریخ دریافت: ۹۷/۷/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۹۷/۱۱/۷

چکیده

سابقه و هدف: مدل‌سازی عددی جریان‌های امتزاج‌ناپذیر در محیط متخلخل از جمله مباحثی است که به دلیل کاربرد آن‌ها در پایش انتقال آلاینده‌ها، حرکت آب و نفت در مخازن نفت و علوم هیدرولوژی همواره مورد توجه پژوهشگران قرار می‌گیرد. در این پژوهش، به ارائه یک مدل عددی دوبعدی گالرکین ناپیوسته جریان‌های امتزاج‌ناپذیر در محیط متخلخل با استفاده از استراتژی حل معادلات فشار-ضمنی درجه اشباع صریح (IMPES) مرتبه بالا پرداخته شده است. در معادلات مورد استفاده متغیرهای اصلی فشار و درجه اشباع آب می‌باشند. در این ترکیب عددی برای اولین بار از روش لاکس-وندروف مرتبه دوم در حل معادله درجه اشباع آب استفاده شده است که به‌عنوان نوآوری اصلی این مقاله تلقی می‌گردد.

مواد و روش‌ها: به‌منظور مدل‌سازی عددی آلاینده‌های زیرزمینی امتزاج‌ناپذیر، از گسسته‌سازی مکانی دارای بقای محلی گالرکین ناپیوسته استفاده شده است. برای گسسته‌سازی زمانی معادله بقای جرم و درجه اشباع (انتقال) آلاینده نیز به‌ترتیب از روش‌های اولر ضمنی مرتبه اول و روش مرتبه بالای لاکس-وندروف صریح مرتبه دوم بهره‌برده شده است. همچنین به‌منظور بهبود نتایج در تسخیر شوک‌ها و محل ناهمگنی‌ها از تثبیت شارهای تبدلی و نگاهت میدان سرعت در فضای برداری $H(\text{div})$ استفاده شده است. در انتهای هر گام زمانی نیز نوسانات مقادیر درجه اشباع با استفاده از محدودکننده شیب چاونت-جافر اصلاح‌شده حذف و نتایج تثبیت می‌گردند.

یافته‌ها: روش مرتبه دوم لاکس-وندروف بر مبنای بسط تیلور و ترم‌های مرتبه بالای مشتق زمانی، دارای دقت قابل رقابت با روش‌های مرسوم در استراتژی IMPES هم‌چون روش چندمرحله‌ای رانج-کوتا گالرکین ناپیوسته (RKDG) بوده و هزینه محاسبات کم‌تری نسبت به روش‌های چندگامی دارد. هر چند اندازه گام‌های زمانی و عدد کورانت با توجه به حل صریح معادله درجه اشباع در این روش دارای محدودیت‌هایی می‌باشد.

* مسئول مکاتبه: mehdi.jamei@shhu.ac.ir

نتیجه‌گیری: صحت‌سنجی مدل تهیه شده با استفاده از مسأله بنجمارک لورت باکلی ارزیابی شده و نتایج حاصل از مدل‌سازی با نتایج سایر پژوهشگران مقایسه گردیده و تطابق مطلوبی بین آن‌ها حاصل شده است. همچنین ارزیابی کارایی و توانمندی مدل با کمک مسائل نمونه برای آبخوان‌های بسیار ناهمگن بررسی شده است. نتایج بیانگر آنست که به‌علت استفاده از روش گالرکین ناپیوسته دارای بقای محلی و تکنیک‌های تثبیت‌کننده شارهای تبادلی، وضوح نتایج مطلوب بوده و محل تماس دوفاز امتزاج‌ناپذیر به‌خوبی تسخیر شده و پخش عددی مشاهده نمی‌گردد. در این مدل‌سازی از مقادیر پنالتی ۵۰ تا ۱۰۰ برای نسخه SWIP استفاده شده است که با توجه با مقیاس نمودن ترم‌های پنالتی مدل حساسیت چندانی نسبت به بزرگی آن ندارد ولی در نسخه OBB مقدار پنالتی صفر می‌باشد. در انتها نیز آنالیز حساسیت مدل به‌ازای تغییرات پارامترهای مؤثر در مدل‌سازی مدنظر قرار گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی: المان‌های بی‌سامان، پنالتی داخلی، جریان‌های امتزاج‌ناپذیر، روش لاکس- وندروف، فشار ضمنی - درجه اشباع صریح

مقدمه

از آب (LANPLS) ممکن است در اثر نشت از حوضچه‌ها و لاگون‌های تصفیه فاضلاب، تراوش سموم به‌کار رفته در زمین‌های زراعی، نشت از زیر مخازن حاوی مشتقات نفتی و شکست لوله‌های انتقال نفت خام مدفون در زمین، وارد آب‌های زیرزمینی گردند. بررسی رفتار آلاینده‌های امتزاج‌ناپذیر از جنبه مدیریت برداشت منابع آب از آبخوان‌ها و همچنین فرآیند احیاء منابع آب، با تکیه بر مطالعه جریان‌های چندفازی در محیط متخلخل میسر می‌باشد. در دهه‌های اخیر مطالعات فراوانی در زمینه مدل‌سازی ریاضی جریان‌های امتزاج‌ناپذیر چندفازی در محیط‌های متخلخل و آبخوان‌ها ارائه شده است. به‌طورکلی معادلات حاکم بر پدیده انتقال آلاینده‌های امتزاج‌ناپذیر (NAPL) در فرم کلی شامل معادله سهموی بقای جرم و معادله هذلولوی انتقال یا درجه اشباع سیال می‌باشند که دارای ماهیتی کاملاً همبسته و از نوع انتقال غالب معرفی می‌گردند. پیشانی تیز در محل تماس فازهای موجود در محیط متخلخل ناشی از رفتار شبه هذلولوی معادلات حاکم بر مسأله بوده و عامل اصلی نوسانات غیرفیزیکی در مقادیر درجه اشباع می‌باشد. خاصیت انتقال- غالب معادلات حاکم

منابع آب زیرزمینی نقشی مهم در پتانسیل ذخیره‌ای منابع آب در جهان دارند و به‌همین علت لازم است تا در قبال تهدید آلاینده‌های زیرزمینی مورد حفاظت قرار گیرند. در دهه‌های اخیر با رشد تکنولوژی و پیشرفت صنعت سخت‌افزاری رایانه، توجه پژوهشگران به مدل‌سازی‌های عددی و ریاضی معطوف شده است به‌طوری‌که مطالعات بسیاری در زمینه رفتارسنجی سفره‌های زیرزمینی در قبال آلاینده‌های مایع و ردیابی آلاینده‌ها در زمینه مسائل زیست‌محیطی و مدیریت منابع آب زیرزمینی صورت گرفته است. مکانیسم انتقال سیالات در محیط‌های متخلخل به دو نوع امتزاج‌پذیر و امتزاج‌ناپذیر تقسیم‌بندی می‌شوند. آلاینده‌های امتزاج‌ناپذیر به‌عنوان یک مایع غیرقابل‌حل در آب (NAPL)^۱ اصولاً به دو نوع آلاینده‌های امتزاج‌ناپذیر سبک‌تر از آب (LNPLS)^۲ و سنگین‌تر از آب (DNAPLS)^۳ تقسیم‌بندی می‌گردد که تفاوت آن‌ها به اختلاف مقدار ویسکوزیته و چگالی با فاز آب باز می‌گردد. آلاینده‌های زیرسطحی امتزاج‌ناپذیر سبک‌تر

- 1- Non-aqueous pollution liquid
- 2- Light non-aqueous pollution liquid
- 3- Heavy non-aqueous pollution liquid

معادلات از روش تفاضلات محدود (بسط تیلور مرتبه بالا) و برای گسسته‌سازی زمانی نیز از روش رانگ-کوتا مرتبه چهار استفاده شد. جامعی و غفوری (۲۰۱۶-۲۰۱۵) و رئیسی و غفوری (۲۰۱۷) به کمک روش‌های گالرکین ناپیوسته به ترتیب به مدل‌سازی جریان‌های امتزاج‌ناپذیر با در نظر گرفتن اثر موینگی و جریان‌های امتزاج‌پذیر با در نظر گرفتن اثر ثقل در محیط متخلخل پرداختند (۲۴، ۲۶ و ۳۳) و جوراک (۲۰۰۸) جریان‌های امتزاج‌ناپذیر را برای آب و گاز در محیط متخلخل با ارائه یک فرمولاسیون جدید سهموی جریان و معادله سهموی انتقال-انتشار را مورد بررسی قرار دادند. ویژگی مهم این فرمولاسیون جایگزینی فشار پایه به جای فشار آب می‌باشد و عمده کاربرد این مطالعات در بررسی اثر زباله‌های رادیواکتیوی می‌باشد (۱). آمازیان و همکاران (۲۰۱۷) مدل‌سازی تباهیده جریان‌های دوفازی تراکم‌ناپذیر امتزاج‌ناپذیر را با ارائه یک فرمولاسیون جدید مورد توجه قرار دادند. در معادلات همبسته غیرخطی سهموی فشار عمومی گاز هیدروژن و انتشار-انتقال درجه اشباع سیال، اثر موینگی، ثقل و ناهمگنی در محیط متخلخل مدنظر قرار گرفته شده است که به ترتیب با استفاده از روش عددی احجام محدود نقطه مرکزی و سراسر ضمنی حل شده‌اند (۲).

حل معادلات انتقال آلاینده‌های امتزاج‌ناپذیر با کمک استراتژی فشار ضمنی-درجه اشباع صریح (IMPES^۳) به عنوان یکی از محبوب‌ترین روش‌ها در مقایسه یا استراتژی‌های حل هم‌زمان^۴ (SS) و حل متوالی^۵ (Seq.S) تقی می‌شود زیرا حافظه کم‌تری را از حجم CPU رایانه اشغال می‌کند و دهه اخیر توسط باستین و ریویه (۲۰۰۴)، آربوگاست و همکاران (۲۰۱۳) و کو و سان (۲۰۱۰) مورد استفاده قرار

سبب گردیده تا نوع استفاده از روش عددی به منظور حل معادلات از اهمیت خاصی برخوردار گردد زیرا لازم است تا تغییرات و گرادیان‌های شدید حاصل از محل تماس فازها و ناهمگنی‌ها را به‌طور مطلوبی تسخیر نماید. از پرکاربردترین روش‌های عددی مورد استفاده در دو دهه اخیر در این زمینه می‌توان به مجموعه روش‌های المان محدود، روش احجام محدود و مشتقات آن‌ها اشاره نمود که الزاماً برای حصول نتایج مطلوب باید دارای خاصیت بقای محلی^۱ محلی^۱ باشند. حداد و همکاران (۱۹۹۶) ردیابی حرکت جانبی و عمودی لکه نفتی را در محیط غیراشباع و محدوده موینگی آبخوان‌ها مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با صرف‌نظر از اثر تبخیر، رقیق‌شدگی و جذب سطحی معادلات چند فاز حاکم بر پدیده انتقال فازهای آب، هوا و نفت را با استفاده از روش المان محدود و الگوریتم شبه‌نیوتنی مورد بررسی نمودند (۲۱). اوزبورن و سیکس (۱۹۹۸) مدل دویعدی جریان‌های دوفازی امتزاج‌ناپذیر را با استفاده از المان‌های مستطیلی ایزوپارامتریک به روش محدود باقی‌مانده‌های وزن‌دار المان محدود ارائه نمودند. آن‌ها ردیابی حلال ارگانیک در محل دفع فاضلاب شیمیایی در شمال آبشار نیاگارا به‌عنوان کاربرد مدل‌سازی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها اثر ناهمگنی و ناهمسانی محیط متخلخل را بررسی نموده و نتایج مدل‌سازی عددی یک‌بعدی با نتایج حل تحلیلی مقایسه نمودند (۳۱). ریاض و چلپی (۲۰۰۶) مدل غیرخطی با در نظر گرفتن اثر فشار موینگی، ویسکوزیته و ثقل را به برای حل معادلات جریان‌های دوفازی امتزاج‌ناپذیر ارائه نمودند (۳۴). در این پژوهش اندرکش پدیده انگشتی شدن^۲ جریان در محیط متخلخل با استفاده از روش عددی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین به‌منظور گسسته‌سازی مکانی

3- Implicit pressure-Explicit saturation (IMPES)
4- Simultaneous solution (SS)
5- Sequential Solution

1- Local Conservative
2- Fingering

فشرده‌تر از روش رانج- کوتا (RKDG) مرتبه بالای چندمرحله‌ای می‌باشد، ولی با مشتقات عددی متوالی مرتبه بالا سرو کار دارد و دقت نتایج آن قابل رقابت با (TVD-RK) می‌باشد. بورگر (۲۰۱۷) مدلی ارائه نمود که برای حل عددی معادله هذلولوی بقاء جرم از روش گسسته‌سازی زمانی لاکس- وندروف به‌عنوان یک جایگزین روش رانج- کوتا گالریکین ناپیوسته با خاصیت تقلیل تغییرات کل (TVD-RK) استفاده نمود (۷). روش‌های گالریکین تیلور مرتبه بالا اخیراً به‌طور قابل‌توجهی برای حل معادلات انتقال، انتقال غالب و انتشار- انتقال مورد بررسی قرار گرفته است (۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴). در روش‌های معمول حل معادلات با روش‌های المان کلاسیک محدود گسسته‌سازی مکانی قبل از گسسته‌سازی زمانی مورد توجه قرار گرفته است ولی در روش لاکس- وندروف یا گالریکین تیلور گسسته‌سازی زمانی معادله قبل از گسسته‌سازی مکانی مورد توجه قرار می‌گیرد (۱۱).

در این پژوهش مدل‌سازی فازهای آلاینده و آب در آبخوان زیرزمینی با استفاده از استراتژی حل معادلات فشار (بقای جرم) ضمنی- درجه اشباع صریح (IMPES) ارائه شده است. در معادلات مورد استفاده متغیرهای اصلی فشار و درجه اشباع آب می‌باشند. برای گسسته‌سازی زمانی معادله بقای جرم و درجه اشباع (انتقال) آلاینده به‌ترتیب از روش‌های اولر ضمنی مرتبه اول و روش مرتبه بالای لاکس- وندروف صریح مرتبه دوم بهره برده شده است. همچنین به‌منظور گسسته‌سازی مکانی معادلات بقای جرم و درجه اشباع آلاینده از روش گالریکین ناپیوسته پنالتی داخلی متقارن وزنی و اودن- باومن- بابوشکا^۵ (OBB) استفاده شده است که با کمک تثبیت‌کننده‌های شار و ترم‌های پنالتی جهت حفظ پیوستگی و بقای

گرفته است (۳، ۴ و ۲۹). در گسسته‌سازی زمانی استراتژی فشار (بقای جرم) ضمنی- درجه اشباع صریح (IMPES) برای معادلات انتقال- غالب هذلولوی، روش صریح رانج- کوتا با خاصیت تقلیل تغییرات کل (TVD) به‌عنوان یکی از موفق‌ترین روش‌های گسسته‌سازی زمانی شناخته شده است. این روش در زمینه مسائل مرتبط با تسخیر شوک‌ها^۱ در دینامیک سیالات محاسباتی بسیار مشهور می‌باشند. این روش برای اولین بار توسط شو^۲ برای حل معادلات هذلولوی غیرخطی گالریکین ناپیوسته ارائه گردید (۳۷). روش‌های گسسته‌سازی با خاصیت TVD در واقع کلاس مرتبه بالای روش‌های گسسته‌سازی زمانی دارای خاصیت حفظ پایداری قوی^۳ (SSP) می‌باشند و به‌همین علت است که روش SSP اغلب به‌عنوان یک طرح TVD شناخته می‌شود (۱۸، ۱۹ و ۲۰). جامعی و غفوری (۲۰۱۶) استراتژی IMPES را با استفاده از روش صریح رانج- کوتای^۴ مرتبه دوم با خاصیت تقلیل کل تغییرات (TVD-RK) در زمینه مدل‌سازی جریان‌های چندفازی و برای مدل‌سازی احیاء ثانویه در مخازن نفت مورد بررسی و ارزیابی قرار دادند که در آن از نوآوری‌های عددی برای بهبود وضوح نتایج در ناهمگنی‌ها حتی برای شبکه‌های درشت استفاده شده است (۲۵). در مسائل انتقال غالب، استفاده از روش لاکس وندروف (همان تیلور گالریکین) مرتبه بالا در المان محدود ناپیوسته با داشتن انعطاف مناسب در شبکه‌های بی‌سامان قادر است در محیط‌های ناهمگن نیز دقت مطلوب را مانند روش رانج کوتای مرتبه بالای چندمرحله‌ای (TVD-RK) و در عوض با یک فرآیند تک‌مرحله‌ای حاصل نماید. هر چند تقریب لاکس- وندروف

- 1- Shock Capturing
- 2- Shu
- 3- Strong Stability Preserving
- 4- Runge-Kutta

5- Oden, Baumann, Babushka

تراکم‌ناپذیری سیالات، معادله بقای جرم دوفازی (معادله فشار آب یا سیال ترکنده) حاصل می‌گردد که در آن ضریب پخش معادله با $\kappa = K(\lambda_t)$ و ترم شبه انتقالی با $\chi = K\lambda_n|P_c'| \nabla S_w$ معرفی می‌گردد:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla P_w) - \nabla \cdot (\chi) = q_w + q_{co}. \quad (2)$$

معادله سرعت داری کل با استفاده از ترکیب قانون داری و قاعده مشتق زنجیره‌ای فشار موینگی عبارت است از:

$$u_t = \chi - \kappa \nabla P_w. \quad (3)$$

معادله‌های کمکی تعادل درجه اشباع و معادله فشار موینگی به منظور استخراج معادلات و تبدیل مجهولات به یکدیگر به ترتیب عبارتند از:

$$S_w + S_n = 1, \quad (4)$$

$$P_c(S_w) = P_{co} - P_w. \quad (5)$$

به منظور استخراج معادله انتقال یا درجه اشباع، از معادله بقای جرم و سرعت داری برای فاز ترکنده (آب) استفاده می‌گردد. در این صورت معادله انتقال یا درجه اشباع آب بر حسب سرعت داری کل u_t عبارت است از:

$$\phi \frac{\partial (S_w)}{\partial t} - \nabla \cdot (\pi(S_w) \nabla S_w) = q_w - \nabla \cdot (f_w u_t) \\ , S_{rw} \leq S_w \leq 1 - S_{rco}. \quad (6)$$

محلی، فرم متوسط وزنی عملگر متوسط و مقیاس نمودن ترم‌های پنالتی وضوح نتایج بهبود بخشیده شده است. در این روش به منظور حفظ پیوستگی بردار نرمال میدان سرعت، از نگاشت میدان سرعت در فضای برداری $H(\text{div})$ استفاده شده است. در انتهای محاسبات به منظور حذف نوسانات غیرفیزیکی مقادیر درجه اشباع آلاینده نیز از محدودکننده شیب استفاده شده است. لازم به ذکر است که بهره‌گیری از روش مرتبه بالای لاکس- وندروف گالرکین ناپیوسته به عنوان نوآوری اصلی این پژوهش مطرح می‌گردد که با توجه به خصوصیات منحصربه‌فرد آن، برای اولین بار در مدل‌سازی جریان‌های دوفازی استفاده شده است.

تئوری و فرمولاسیون مسأله: در محیط متخلخل Ω حرکت جریان‌های دوفازی امتزاج‌ناپذیر شامل آب (فاز ترکنده) و آلاینده امتزاج‌ناپذیر (فاز غیر ترکنده) با استفاده از دو معادله بقای جرم (فشار) و معادله انتقال (درجه اشباع) توصیف می‌گردد. معادله بقای جرم و سرعت داری هر فاز سیال α در نقطه دلخواه از دامنه $\forall x \in \Omega$ عبارت است از:

$$\frac{\partial (\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha u_\alpha) = \rho_\alpha q_\alpha, \quad (1) \\ u_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} K (\nabla P_\alpha - \rho g \nabla D_z), \quad \alpha \\ = w, co.$$

که در آن، $(\alpha = w, co)$ به ترتیب فازهای آب (سیال ترکنده) و آلاینده (سیال غیر ترکنده) تعریف می‌گردند. به منظور سهولت در مراحل گسسته‌سازی مکانی، ترم گرادیان فشار موینگی در معادلات حاکم را می‌توان با استفاده از قانون مشتق زنجیره‌ای بر حسب درجه اشباع بیان نمود $(\nabla P_c = -|P_c'| \nabla S_w)$. با جمع جبری معادلات بقای جرم هر دو فاز آب و آلاینده، صرف‌نظر از ترم‌های شتاب ثقلی و فرض

$$P_c(S_w) = \frac{1}{\alpha} (S_e^{\frac{-1}{m}} - 1)^{\frac{1}{n}}. \quad (14)$$

که در آن‌ها، γ ، m و ϵ ضرائب ثابت تجربی می‌باشند ($\epsilon = \frac{1}{2}$ و $\gamma = \frac{1}{3}$) (۳۹). پارامتر درجه اشباع مؤثر به صورت ذیل تعریف می‌گردد (۲۸):

$$S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rco} - S_{rw}}, \quad (15)$$

$$S_{rw} \leq S_w \leq 1 - S_{rco}, \quad 0 \leq S_e \leq 1$$

حل معادلات حاکم بر مدل‌سازی با ارائه شروط مرزی امکان‌پذیر خواهد بود. مرزهای دامنه به سه قسمت ورودی Γ_{in} و خروجی Γ_{out} و مرز نفوذناپذیر Γ_N ($\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_N$) تقسیم می‌گردند. نوع مرزها شامل دیریشله^۵ Γ_D ، مرز نیومن^۶ Γ_N و شرط مرزی ورودی (رابین^۷) Γ_R بوده که با هم مرز مشترکی ندارند $\Gamma_D \cap \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$ به طوری که قسمت ورودی مرز $\Gamma_{in} = \{x \in \partial\Omega: u_t \cdot n_F < 0\}$ و قسمت خروجی نیز به صورت $\Gamma_{out} = \{x \in \partial\Omega: u_t \cdot n_F \geq 0\}$ تعریف می‌گردد. شروط دیریشله و نیومن معادله (بقای جرم) فشار به صورت ذیل تعریف می‌گردند (۱۶، ۲۸ و ۳۵):

$$P_w = P_{dir}^-, \quad (S_w u_t - \pi(S_w) \nabla S_w) \cdot n_F = S_{in} u_t \cdot n_F \quad \text{on } \Gamma_{in} \sim \Gamma_R, \quad (16)$$

$$P_w = P_{dir}^+, \quad \pi(S_w) \nabla S_w \cdot n_F = 0 \quad \text{on } \Gamma_{out}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (\kappa(S_w) \nabla P_w) \cdot n_F &= \gamma_N, \\ (\pi(S_w) \nabla S_w) \cdot n_F &= 0 \quad \text{on } \Gamma_N, \end{aligned} \quad (18)$$

$$S_w(\cdot, 0) = S_{initial}. \quad (19)$$

ضریب انتشار معادله درجه اشباع با $\pi = K \left| P_c' \right| \frac{\lambda_w \lambda_{co}}{\lambda_t}$ نشان داده می‌شوند. روابط تحرک‌پذیری^۱ کل λ_t و تابع کسر جریان^۲ f_w نیز عبارتند از:

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \lambda_w + \lambda_{co}, \\ u_t &= u_w + u_{co}, \quad f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_t}. \end{aligned} \quad (7)$$

در این پژوهش به منظور توصیف توابع نفوذپذیری نسبی و فشار موینگی، امکان استفاده از توابع غیرخطی بروکس-کری^۳ و وان گنختون^۴ مهیا می‌باشد. نفوذپذیری نسبی در فاز آب و آلاینده و همچنین فشار موینگی براساس توابع بروکس-کری به صورت ذیل معرفی می‌شوند:

$$k_{rw}(S_e) = S_e^{\frac{2+3\zeta}{\zeta}}, \quad 0.2 \leq \zeta \leq 4 \quad (8)$$

$$k_{rco}(S_e) = (1 - S_e)^2 \left(1 - S_e^{\frac{2+3\zeta}{\zeta}} \right), \quad (9)$$

$$P_c(S_e) = P_d S_e^{\frac{-1}{\zeta}}, \quad (10)$$

$$k_{rw}(0) = 0, k_{rco}(0) = 1, \lim_{S_e \rightarrow 0} P_c = \infty. \quad (11)$$

که در آن‌ها، P_d فشار موینگی ورودی و ضریب $\zeta \in [0.2, 4]$ به صورت تجربی و بر اساس دانه‌بندی ذرات محیط متخلخل تعیین می‌شود (۵). همچنین توابع نفوذپذیری و فشار موینگی وان گنختون عبارتند از:

$$k_{rw}(S_e) = S_e^\epsilon \left[1 - \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2, \quad (12)$$

$$k_{rco}(S_e) = (1 - S_e)^\nu \left[1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right]^2, \quad (13)$$

5- Dirichlet
6- Neumann
7- Robin

1- Mobility
2- Fractional flow function
3- Brooks & Corey
4- Van Genutchen

فضای هیلبرتی^۴ ناپیوسته المان‌های محدود $\mathbb{V}_r(\mathcal{T}_h) = \{\psi_i \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h: \psi_i|_T \in \mathbb{P}_r^d(T)\}$ و $\mathbb{P}_r^d(T)$ نیز فضای چندجمله‌ای‌های تقریبی با درجه کوچک‌تر و یا مساوی r روی المان T می‌باشد (۱۰ و ۳۵). درجات تقریب فشارآب و درجه اشباع آلاینده در این پژوهش به ترتیب $r_p = \{1\}$ و $r_s = \{1\}$ و توابع متناظر به آن‌ها به صورت $(v, z) \in \mathbb{V}_{r_p}(\mathcal{T}_h) \times \mathbb{V}_{r_s}(\mathcal{T}_h)$ تعریف می‌گردند. مفاهیم پرش^۵ و متوسط^۶ بر اساس رد تابع آزمون در یک نقطه در روی مرز مشترک F دو المان مجاور (T^+, T^-) به ترتیب با استفاده از رابطه‌های ۲۰ تا ۲۴ تعریف می‌شوند. تعریف پرش در دو المان مجاور و المان مرزی به ترتیب عبارت است از:

$$[[\psi]] = \psi^-|_F - \psi^+|_F, \quad F \in \mathcal{F}_h^i \quad (20)$$

$$[[\psi]] = \psi^-|_F, \quad F \in \mathcal{F}_h^b \quad (21)$$

در عبارت پرش، بردار نرمال n_F به سمت خارج از المان T^- می‌باشد. در این پژوهش به منظور بهبود کیفیت نتایج عددی، به جای استفاده از عملگر متوسط حسابی از عملگر متوسط وزنی^۷ در گسسته‌سازی مکانی معادلات گسسته‌سازی استفاده می‌شود. بنابراین برای هر تابع اسکالر مانند ψ بر روی وجه مشترک $F \in \mathcal{F}_h^i$ دو المان مجاور، متوسط وزنی مطابق رابطه (۲۲) تعریف می‌گردد. این روش گسسته‌سازی به نسخه پنالتی داخلی وزنی گالریکین ناپیوسته (WIPG)^۸ موسوم می‌باشد (۱۰ و ۱۵).

که در آن‌ها، P_{dir}^+ و P_{dir}^- به ترتیب فشار معلوم در مرزهای ورودی و خروجی دیریشله می‌باشد. همچنین S_{in} درجه اشباع ورودی در شرط مرزی رایین $(I_{in} = \Gamma_R)$ ، $S_{initial}$ درجه اشباع اولیه و n_F بردار نرمال عمود بر مرز معرفی می‌شوند.

ساختار عددی مدل: قبل از معرفی ساختار عددی مدل لازم است برخی مفاهیم مورد نیاز معرفی گردند. در ساختار عددی مورد مطالعه، دامنه $\Omega \in \mathbb{R}^2$ در یک فضای پیوسته دوبعدی چندوجهی نیمه‌یکنواخت و سازگار می‌باشد که دارای المان مثلثی $\mathcal{T}_h = \{T_i\}_{N_h}$ متشکل از وجوه داخلی^۱ مشترک T^+ و T^- بین دو المان مجاور $\partial T^+ \cap \partial T^- \subset \mathcal{F}_h^i$ و وجوه مرزی $\partial T \cap \partial \Omega \subset \mathcal{F}_h^b$ می‌باشد که به ترتیب عضو زیرمجموعه \mathcal{F}_h^i و \mathcal{F}_h^b می‌باشند. همه وجوه دامنه به صورت $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$ نمایش داده می‌شود (۱۰). n_F بردار نرمال واحد بر وجه F می‌باشد که جهت آن از المان T^- به T^+ تعریف می‌گردد. اگر $\|T\|$ سطح مقطع هر المان و $\|F\|$ طول وجه معرفی گردد، آن‌گاه مطابق شکل ۱، قطر وجه F با رابطه $h_F = \frac{\|T\|}{\|F\|}$ حاصل تعریف می‌گردد (۱۰ و ۱۵). همچنین اگر قطر هر المان h_T نامیده شود، برای نمایش ریز یا درشت بودن شبکه المان‌ها از پارامتر اندازه شبکه $h = \max(h_T)_{\forall T \in \mathcal{T}_h}$ استفاده می‌شود که برابر بیشینه قطر h_T المان‌ها^۲ در دامنه \mathcal{T}_h خواهد بود. برای المان‌های مجاور T^+ و T^- همواره رابطه $h_{T^+} \leq h_{T^-} \leq \zeta^{-1} h_{T^-}$ صادق است که در آن ζ مقداری مثبت و ثابت است و به شکل شبکه بستگی دارد (۱۰). در دامنه گسسته‌سازی فوق، ψ_i معرف چندجمله‌ای تکه‌ای^۳ ناپیوسته مرتبه r مربوط به زیر

4- Hilbert Space

5- Jump

6- Average

7- Weighted average

8- Weighted Interior Penalty Galerkin

1- Interior Edge

2- Element Diameter

3- Piecewise polynomial

$$w_{\mathcal{F}^-} = \frac{\kappa_{T^+,F}}{\kappa_{T^+,F} + \kappa_{T^-,F}}, \quad \{\psi\}_w = w_{\mathcal{F}^-} \cdot \psi^-|_F + w_{\mathcal{F}^+} \cdot \psi^+|_F, \quad F \in \mathcal{F}_h^i \quad (22)$$

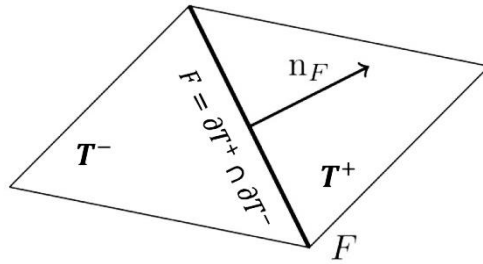
$$w_{\mathcal{F}^+} = \frac{\kappa_{T^-,F}}{\kappa_{T^+,F} + \kappa_{T^-,F}}, \quad (24) \quad \{\psi\} = \psi^-|_F, \quad F \in \mathcal{F}_h^b, \quad (23)$$

$$F = \partial T^- \cap \partial T^+$$

که در آن، $w_{\mathcal{F}^+} + w_{\mathcal{F}^-} = 1, w_{\mathcal{F}^\pm} \geq 0$

که در آن، $(\kappa_{T^\pm,F} = n_F^T K^\pm n_F)$ مؤلفه نرمال نفوذپذیری ذاتی می‌باشد. هرگاه محیط متخلخل مورد بررسی همگن باشد، عملگر متوسط وزنی در وجوه مشترک به متوسط حسابی ($w_{\mathcal{F}^+} = w_{\mathcal{F}^-} = 0.5$) تبدیل می‌شود (۳۵).

ضرائب وزنی عملگر متوسط در محیط ناهمگن به تانسور نفوذپذیری ذاتی K بستگی دارد که توزیع آن روی المان یکنواخت می‌باشد. فرض می‌شود تانسورهای K^\pm روی المان‌های $T^\pm|_F$ ثابت باشند، آن‌گاه ضرائب وزنی عبارتند از:



شکل ۱- نمایش هندسی سطوح تماس بین المان‌ها و بردارهای نرمال بر هر وجه.

Figure 1. Description of interface between neighboring elements and normal vectors on each edge.

ضرب تابع آزمون $v \in \mathbb{V}_{T_p}(\mathcal{T}_h)$ در معادله فشار و با کمک تئوری دیورژانس در تقلیل مرتبه عبارت انتگرالی ترم پخشیدگی، فرم دو خطی معادله گسسته‌سازی بقای جرم (فشار آب) عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \kappa(S_W^n) \nabla P_W^{n+1} \cdot \nabla v \, dT \\ & - \sum_{F \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_F \{ \kappa(S_W^n) \nabla P_W^{n+1} \cdot n_F \}_w \llbracket v \rrbracket \, ds \\ & + \sum_{F \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_F \eta \{ \kappa(S_W^n) \nabla v \cdot n_F \}_w \llbracket P_W^{n+1} \rrbracket \, ds \\ & + \sum_{F \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \sigma_F \langle \gamma \rangle_{FP} \frac{r_p^2 \|F\|}{\text{Mean}(\|T^-\|, \|T^+\|)} \int_F \llbracket v \rrbracket \llbracket P_W^{n+1} \rrbracket \, ds \end{aligned}$$

گسسته‌سازی معادله فشار: معادلات حاکم بر مدل‌سازی حاضر، با استفاده از استراتژی فشار ضمنی - درجه اشباع صریح (IMPES) حل می‌گردند. به همین منظور ابتدا ضرائب غیرخطی معادله فشار (ضرائب λ_n^n, λ_w^n و $|P_c'^m|$) با استفاده از مقادیر درجه اشباع در یک گام عقب‌تر S_W^n محاسبه و به این ترتیب معادله فشار خطی می‌گردند. آن‌گاه معادله فشار با ضرائب خطی با استفاده از روش ضمنی (اولر) مرتبه اول حل شده و میدان فشار P_W^{n+1} در سطح زمانی جدید t^{n+1} محاسبه می‌گردد. گسسته‌سازی مکانی معادله فشار با استفاده از روش‌های گالریکین ناپیوسته و گسسته‌سازی زمانی آن با روش ضمنی اولر مرتبه اول می‌باشد. بنابراین با انتگرال‌گیری از حاصل

متوسط هارمونیک ضریب پخش معادله فشار آب

$$D_{Fp} = K\lambda_t \text{ می باشد (۲۵):}$$

$$\langle \gamma \rangle_{Fp} = \frac{2D_{Fp}^+ D_{Fp}^-}{D_{Fp}^+ + D_{Fp}^-}, \quad \forall F \in F_h^i,$$

$$\langle \gamma \rangle_{Fp} = D_{Fp}^-, \quad \forall F \in F_h^b. \quad (۲۷)$$

به منظور تقریب مقدار اسکالر و مشتق مکانی تابع فشار نیز خواهیم داشت ($\nu \cong N$):

$$P_{w,j} = \sum_{j=1}^{NPE} PN_j,$$

(۲۸)

$$\frac{\partial P_{w,j}}{\partial X} = \sum_{j=1}^{NPE} P_{w,j} \frac{\partial N_j}{\partial X}, \quad X = x, y$$

بازسازی میدان سرعت با کمک نگاشت در فضای

برداری: پس از تعیین میدان فشار با استفاده از روش

گالرکین ناپیوسته باید میدان سرعت u_t^{n+1} بر مبنای

مشتقات فشار و درجه اشباع برای حل معادله درجه

اشباع تعیین گردد. به همین دلیل از تکنیک نگاشت و

بازسازی میدان سرعت در فضای برداری مرتبه پایین

راویارت توماس $RT_0 \in H(\text{div})$ استفاده می گردد که

در آن مؤلفه بردار نرمال سرعت $(u_t^{n+1} \cdot n_F = q_{t,i}^{n+1})$

پیوسته و بقای محلی نیز حفظ می گردد. بردار نرمال

سرعت در فضای راویارت-توماس مرتبه پایین RT_0

در هر وجه $F \in \mathcal{F}_h$ مقداری ثابت و میدان سرعت

به صورت خطی $u_t^{n+1} = \sum_{i=1}^3 q_{t,i}^{n+1} \cdot \vec{\Psi}_{F,i}$ تغییر

می کند. معادله گسسته مؤلفه نرمال سرعت یا درجات

آزادی $q_{t,i}^{n+1}$ عبارتند از:

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \chi^n \cdot \nabla v dT - \sum_{F \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_F \chi^{n+1} \cdot n_F \|v\| ds + \sum_{F \in \Gamma_D} \int_F \eta(\kappa(S_W^n)) \nabla v \cdot n_F P_{dir} ds$$

$$+ \sum_{F \in \Gamma_D} \sigma_F \langle \gamma \rangle_{Fp} \frac{r_p^2 \|F\|}{\text{Mean}(\|T^-\|, \|T^+\|)} \int_F v P_{dir} ds$$

$$+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (q_w^{n+1} + q_n^{n+1}) v dT \quad (۲۵)$$

پارامترهای $\sigma_F \geq 0$ و η به عنوان ضرایب پنالتی و

مقارن کننده شناخته می شود و انواع روش های پنالتی

داخلی را از یکدیگر متمایز می کنند به طوری که مقدار

$(\eta = -1, \sigma_F \neq 0)$ بیانگر روش پنالتی داخلی

مقارن وزنی (SWIP) و $(\eta = 1, \sigma_F = 0)$ بیانگر

نسخه گالرکین ناپیوسته اودن-باومن-بابوشکا

(OBB) می باشد. همان طور که در مقدمه بیان شد، در

این پژوهش از این دو نسخه جهت گسسته سازی

مکانی معادلات حاکم استفاده می گردد. در ترم شبه

انتقال $\chi(S_W^n)$ به منظور تثبیت گسسته سازی مکانی و

افزایش پایداری از فرم بادسوی این عبارت برای

وجوه داخلی $F \in \mathcal{F}_h^i$ استفاده می گردد (۲۸ و ۳۵).

$$\forall F = \partial T^- \cap \partial T^+, \quad \forall \chi,$$

(۲۶)

$$\chi^\uparrow = \begin{cases} \chi^-: & \text{if } \{u_t \cdot n_F\} \geq 0 \\ \chi^+: & \text{other wise} \end{cases}$$

همچنین در این پژوهش از تکنیک مقیاس نمودن

ترم پنالتی به منظور کاهش حساسیت انتخاب ترم

پنالتی σ_F استفاده شده است که مقدار که در آن $\langle \gamma \rangle_F$

$$\bar{\Psi}_F = \frac{\|F\|}{2\|T\|}(X - X_P), \quad (32)$$

$X_P =$ the vertex of P opposite to F

که در آن، X_P مختصات گره مقابل به وجه F می‌باشد و باید خاصیت زیر (رابطه ۳۳) را ارضا نمایند (۱۰ و ۲۷):

$$\bar{\Psi}_F|_{F'} \cdot n_{F'} = \delta_{F,F'}, \quad u_t \cdot n_F \in \mathbb{P}_t^{d-1}(F) \quad F, \quad F' \in \mathcal{F}_h. \quad (33)$$

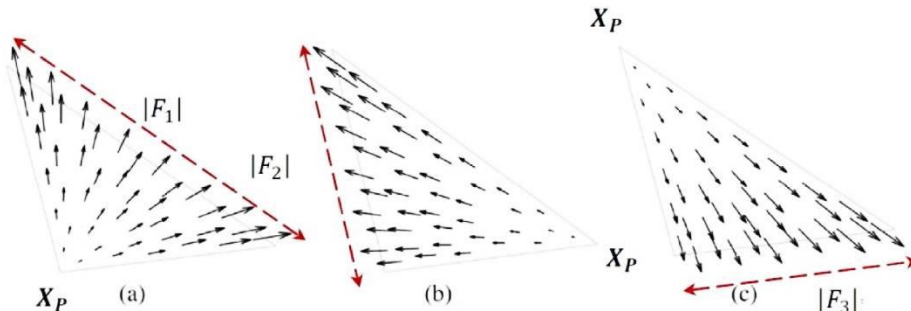
که در آن‌ها، $F' = 1, 2, 3$ بردار نرمال $n_{F'}$ وجه $\delta_{F,F'}, F'$ دلتای کرونگر و $(d = 2, l = 0)$ می‌باشد.

$$q_{t,i}^{n+1} = \int_F (-\{K\lambda_t \nabla P_w^{n+1}\}_w \cdot n_F + \{(K\lambda_n |P_c'| \nabla S_w^n)\}_w \cdot n_F + \sigma_F \langle \gamma \rangle_{Fp} \frac{r_p^2 \|F\|}{\text{Mean}(\|T^-\|, \|T^+\|)} \llbracket P_w^{n+1} \rrbracket' \quad (29)$$

$$\llbracket P_w^{n+1} \rrbracket' = \begin{cases} \llbracket P_w^{n+1} \rrbracket & F \in \mathcal{F}_h^i \\ P_w^{n+1} - P_{dir} & F \in \mathcal{F}_h^b \text{ on } \Gamma_D, \end{cases} \quad (30)$$

$$q_{t,i}^{n+1} = 0 \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (31)$$

تابع درونیابی برداری در فضای راویارت-توماس مرتبه پایین $\bar{\Psi}_{F,i} \in RT_0$ ، به صورت زیر تعریف می‌گردد (شکل ۴-۱۳):



شکل ۲- توصیف توابع آزمون برداری مرتبه پایین راویارت-توماس.

Figure 2. Description of vectorial lowest order Raviart-Thomas test function.

می‌گردد را روش تیلور گالرکین گویند. بسط تیلور برای گسسته‌سازی زمانی متغیر U عبارتست است از:

$$U_t^n = (U^{n+1} - U^n)/\Delta t - \frac{\Delta t}{2} U_{,tt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (34)$$

با توجه به آن‌که معادله دیفرانسیل جزئی درجه اشباع از نوع انتقال- غالب با خاصیت هذلولوی می‌باشد می‌توان در مشتقات مرتبه بالای بسط تیلور

گسسته‌سازی معادله درجه اشباع: در معادله درجه اشباع به علت استفاده از روش مرتبه بالای لاکس- وندروف (تیلور گالرکین) در استراتژی IMPES، گسسته‌سازی زمانی قبل از گسسته‌سازی مکانی مورد توجه قرار می‌گیرد. همان‌طور که در مقدمه بین شد، روش لاکس- وندروف بر پایه بسط تیلور می‌باشد و به همین علت روش‌های المان محدود که در آن‌ها که از بسط تیلور برای گسسته‌سازی زمانی استفاده

$$S_{w,tt}^n = \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} \cdot f_w^n \cdot (u_t^n \cdot \nabla)^2 + \frac{2\pi(S_w^n)}{\phi} \nabla^2 \left(\frac{S_w^{n+1} - S_w^n}{\Delta t} \right) + \mathcal{O}(\Delta t, \pi^2). \quad (39)$$

از جای‌گذاری رابطه‌های ۳۵ و ۳۹ در بسط تیلور، فرم نهایی $S_{w,tt}^n$ در معادله درجه اشباع عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\Delta t \pi(S_w^n)}{\phi} \nabla^2 \right] (S_w^{n+1} - S_w^n) / \Delta t \\ &= \frac{1}{\phi} [q_w - \nabla \cdot (f_w^n u_t^n) + (\pi(S_w^n) \nabla S_w^n) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\phi} \cdot \frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} \cdot f_w^n \cdot (u_t^n \cdot \nabla)^2] + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= \frac{1}{\phi} [q_w - \nabla \cdot (f_w^n u_t^n) + (\pi(S_w^n) \nabla S_w^n) + \\ &\frac{\Delta t}{2\phi} \cdot \frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} \cdot f_w^n (q_w + q_{co})^2] + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (40) \end{aligned}$$

در فضای $\mathbb{V}_{r_s}(\mathcal{J}_h)$ با حاصل ضرب تابع آزمون خطی تقریبی ناپیوسته Z و با کمک انتگرال جزء به جزء روی کل دامنه Ω ، فرم ضعیف معادله گسسته‌سازی مکانی درجه اشباع آب به صورت یک معادله دیفرانسیلی معمولی $L(S_{w,h}^n)$ $\frac{dS_w}{dt} = M^{-1} \cdot L(S_{w,h}^n)$ ظاهر می‌گردد. به منظور تقریب مقدار اسکالر و مشتق مکانی تابع درجه اشباع نیز خواهیم داشت ($Z \cong N$):

$$S_{w,j} = \sum_{j=1}^{NPE} S_{w,j} N_j, \quad (41)$$

$$= \sum_{j=1}^{NPE} S_{w,j} \frac{\partial N_j}{\partial X}, \quad X = x, y$$

$(S_{w,tt}^n)$ ، ضریب پخش را در معادله درجه اشباع ثابت فرض نمود $(\nabla \cdot (\pi \nabla S_w^n) = \pi \nabla^2 S_w^n)$. همچنین تغییرات زمانی میدان سرعت در مشتقات مرتبه بالا $(S_{w,tt}^n)$ ، ثابت فرض می‌گردد $(\frac{\partial u_t^n}{\partial t} = 0)$. با فرضیات فوق مشتقات درجه اشباع عبارتند از:

$$S_{w,t}^n = \frac{1}{\phi} [\nabla \cdot (\pi(S_w^n) \nabla S_w^n) + q_w - \nabla \cdot (f_w^n u_t^n)]. \quad (35)$$

$$S_{w,tt}^n = \frac{1}{\phi} [\pi(S_w^n) \nabla^2 S_{w,t}^n - \nabla \cdot \left(\frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} S_{w,t}^n \cdot u_t^n \right)]. \quad (36)$$

$$\begin{aligned} S_{w,tt}^n &= \frac{1}{\phi^2} \nabla \cdot \left(\frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} \cdot u_t^n \nabla \cdot (f_w^n u_t^n) \right) \\ &- \frac{1}{\phi^2} \nabla \cdot \left(\frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} \cdot u_t^n (\pi(S_w^n) \nabla^2 S_w^n) \right) \\ &+ \frac{1}{\phi} \pi(S_w^n) \nabla^2 S_{w,t}^n. \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{w,tt}^n &= \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} f_w^n \cdot (u_t^n \cdot \nabla)^2 \\ &- \frac{1}{\phi^2} \pi(S_w^n) \nabla^2 \left(\frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} \cdot u_t^n \nabla S_w^n \right) \\ &+ \frac{1}{\phi} \pi(S_w^n) \nabla^2 S_{w,t}^n + \mathcal{O}(\Delta t, \pi^2). \quad (38) \end{aligned}$$

با معادلسازی جمله $\left(\frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} \cdot u_t^n \nabla S_w^n \right)$ از معادله درجه اشباع بر حسب $(S_{w,t}^n)$ ، صرف نظر از مشتقات مرتبه بالا $[\nabla^2 (\pi(S_w^n) \nabla^2 S_w^n)]$ و نهایتاً جای‌گذاری $S_{w,t}^n$ با $\frac{S_w^{n+1} - S_w^n}{\Delta t}$ مطابق پژوهش‌های رویگ (۲۰۰۷) خواهیم داشت (۳۶):

معادله دیفرانسیلی معمولی درجه اشباع آب عبارتست است از:

$$[M] = \sum_{T \in T_h} \int_T [z_i z_j + \frac{\Delta t \pi(S_w^n)}{\phi} \nabla z_i \cdot \nabla z_j] dT$$

$$- \sum_{F \in \Gamma_h} \int_F \frac{\Delta t \pi(S_w^n)}{\phi} (\nabla z_j \cdot n_F) [z_i] ds,$$

$$(S_w^{n+1} - S_w^n) / \Delta t = \frac{1}{\phi} M^{-1} \cdot L(S_{w,h}^n). \quad (42)$$

که در آن، $L(S_{w,h}^n)$ بردار معلوم و M ماتریس بلوک قطری و معکوس‌پذیر جرم می‌باشد و با توجه به تشابه ماتریس جرم در بازه‌های زمانی و نیاز به اطلاعات متغیر درجه اشباع S_w ، محاسبه بردار $L(S_{w,h}^n)$ به‌طور موازی و سرعت بالا قابل انجام می‌باشد. فرم کامل گسسته‌سازی شده معادله درجه اشباع با استفاده از گالرکین ناپیوسته به‌صورت زیر معرفی می‌گردد.

$$L(S_{w,h}^n) = - \sum_{T \in T_h} \int_T \pi(S_w^n) \nabla S_w^n \cdot \nabla z dT$$

$$+ \sum_{F \in \Gamma^-} \int_F S_w^n u_t^{n+1} \cdot n_F z ds$$

$$- \sum_{F \in \Gamma_h} \int_F \eta [S_w^n] \{ \pi(S_w^n) \nabla z \cdot n_F \}_w ds$$

$$+ \sum_{F \in \Gamma_h} \int_F [z] \{ \pi(S_w^n) \nabla S_w^n \cdot n_F \}_w ds$$

$$+ \sum_{T \in T_h} \int_T f_w^n u_t^{n+1} \cdot \nabla z dT$$

$$- \sum_{F \in \Gamma_h} \int_F f_w^{n+1} u_t^{n+1} \cdot n_F [z] ds$$

$$- \sum_{F \in \Gamma_h} \int_F \gamma [z] [S_w^n] ds$$

$$- \sum_{F \in \Gamma_h} \int_F \gamma [z] [S_w^n] ds$$

$$+ \sum_{T \in T_h} \int_T (q_w^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\phi} \frac{\partial f_w^n}{\partial S_w} \cdot f_w^n (q_w^{n+1} + q_{co}^{n+1})^2) z dT \quad (43)$$

$$S_w^{n+1} = S_w^n + \frac{\Delta t}{\phi} M^{-1} \cdot L(S_{w,h}^n), \quad (44)$$

$$z_i, z_j \in V_{r_s}(T_h)$$

در گسسته‌سازی معادله درجه اشباع، به‌دلیل ناپایداری ناشی از ترم انتقال $(f_w u_t)$ ، برای منظور تثبیت نتایج از فرم بادسوی ترم کسر جریان f_w استفاده می‌گردد:

$$\forall F = \partial T^- \cap \partial T^+, \quad \forall f_w^n, f_w^{n+1}$$

$$= \begin{cases} f_w^{n-}: & \text{if } \{u_t \cdot n_F\} \geq 0, \\ f_w^{n+}: & \text{other wise.} \end{cases} \quad (45)$$

پارامتر $\langle \gamma \rangle_{FS}$ ، متوسط هارمونیک ضریب انتشار معادله درجه اشباع و γ_B نرم مؤلفه نرمال سرعت در هر وجه داخلی F معرفی می‌گردد. هدف از اعمال γ_B در نظر گرفتن خاصیت هذلولوی معادله درجه اشباع می‌باشد.

$$\gamma = \sigma_F \langle \gamma \rangle_{FS} \frac{r_s^2 \|F\|}{\text{Mean}(\|T^-\|, \|T^+\|)} + \gamma_B, \quad (46)$$

$$\forall F \in F_h^i$$

$$\langle \gamma \rangle_{FS} = \frac{2D_{FS}^+ D_{FS}^-}{D_{FS}^+ + D_{FS}^-}, \quad \in F_h^i$$

$$\gamma_B = \frac{1}{2} |u_t \cdot n_F|, \quad \forall F \quad (47)$$

$$\langle \gamma \rangle_{FS} = D_{FS}^-, \quad \forall F \in F_h^b \quad (48)$$

تکنیک محدودشدگی مقادیر گرهی با استفاده از محدودکننده‌های شیب گره محور چاونت- جافر اصلاح شده^۲ بهره گرفته شده است (۲۵). علت استفاده از محدودکننده گره- محور^۳ غیرنوسانی چاونت- جافر اصلاح شده در مدل تهیه شده خصوصیات منحصربه‌فرد آن در تثبیت نتایج و سازگاری آن با طرح لاکس- وندروف می باشد. در هر المان $T \in \mathcal{T}_h$ ، مجموعه المان‌های احاطه‌کننده هر گره مانند i با نماد $\mathcal{I}_h = \{T \in \mathcal{T}_h | i \subset T\}$ معرفی می‌شود. \mathcal{N}_T تعداد رئوس هر المان و عملگر محدودکننده شیب، به صورت $\mathcal{L}(S_w) = \bar{S}_w$ نمایش داده می‌شود. متوسط متغیر درجه اشباع در هر المان T ، $\bar{S}_{w,Ave}$ و بیشینه $\bar{S}_{w,max,i}$ و کمینه $\bar{S}_{w,min,i}$ متوسط المان‌های احاطه‌کننده گره i در مجموعه \mathcal{I}_T قبل از فرآیند محدودشدگی به صورت زیر تعریف می‌گردند (۲۲ و ۲۳):

$$\bar{S}_{w,Ave} = \frac{1}{|T|} \int_T S_{w,i}$$

$$\bar{S}_{w,min,i} = \min\{\bar{S}_{w,Ave} \in T_h\},$$

$$\bar{S}_{w,max,i} = \max\{\bar{S}_{w,Ave} \in T_h\}, \quad (50)$$

که در آن، گره i راس المان T می‌باشد. در این تابع هدف، تفاضل مقادیر درجه اشباع قبل $S_{w,i}$ و بعد از فرآیند محدودشدگی $\bar{S}_{w,i}$ در هر المان کمینه‌سازی می‌گردد تا از نوسانات غیرفیزیکی جلوگیری نماید و دقت در وضعیت بهینه حاصل گردد. در قید اول با تحمیل تساوی متوسط درجات اشباع قبل $\bar{S}_{w,Ave}$ و بعد از محدودشدگی $\bar{S}_{w,Ave}$ و قید دوم با کنترل مقادیر گرهی بعد از محدودشدگی $\bar{S}_{w,i}$ بین بیشینه

در معادلات حاکم بر انتقال آلاینده‌ها، آهنگ تغییرات فشار فاز آب در زمان به مراتب کم‌تر از متغیر درجه اشباع می‌باشند. به همین علت انتخاب گام زمانی در حل معادله درجه اشباع به روش صریح از جمله قیود مهم در استراتژی IMPES به‌شمار می‌آید که باید با کنترل عدد بی‌بعد کورانت- فردریش- لوی^۱ از دامنه معینی تجاوز ننماید. زمان اجرای مدل $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^{n-1} = T$ زیربازه‌های زمانی برای حل معادله درجه اشباع $\Delta t_s^n = (t^{n-1}, t^n]$ و تعداد کل بازه‌های آن $N = T/\Delta t_s^n$ می‌باشند. پژوهش‌ها نشان می‌دهد هرگاه از درجات تقریب مرتبه r_s مکانی استفاده گردد، عدد کورانت با دامنه $CFL \leq \frac{1}{2r_s+1}$ پایداری جواب‌ها معادله درجه اشباع را حفظ می‌نماید (۳۰ و ۳۸). در این پژوهش، با توجه به خطی بودن درجات تقریب درجه اشباع ($r_s = 1$)، محدودیت کورانت $CFL_{max} \leq \frac{1}{3}$ می‌باشد. همچنین برای تعیین حداکثر دامنه گام‌های زمانی Δt^n در رابطه کورانت داریم:

$$CFL = \frac{df_w}{dS_w} \cdot \frac{\|u_t\| \Delta t_s^n}{\phi \cdot \min(h)} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Delta t_s^n \leq \frac{1}{3} \frac{\min(h)}{\phi \cdot \|u_t\| \cdot \frac{df_w}{dS_w}}, h = \{h_T, \rho_T\}. \quad (49)$$

در این‌جا $[0, T]$ تقسیمات بازه زمانی با $N \Delta t_s^n = T$ تعریف می‌گردد که در آن $n = 0, 1, 2, \dots, N$ شماره گام زمانی و $\Delta t_s^n \in [t_n, t_{n+1}]$ تعداد N تقسیمات زمانی می‌باشد.

محدودکننده شیب مقادیر گرهی: به‌منظور کنترل نوسانات غیرفیزیکی معادله غیرخطی درجه اشباع، از

2- Modified Chavent & Jaffre slope limiter

3- Vertex-Base

1- Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

از استراتژی IMPES نمایش داده شده است. مدل عددی معرفی شده در این پژوهش با استفاده از زبان Matlab R2013-a، به‌کارگیری خواص برداری ماتریس‌ها و همچنین خاصیت ماتریس‌های تنک^۱ تهیه شده است.

صحت‌سنجی مدل با مسأله بنجمارک باکلی- لورت: در این بخش صحت عملکرد مدل با استفاده از مسأله بنجمارک باکلی- لورت بررسی می‌گردد. نتایج حاصل با حل تحلیلی و نتایج سایر پژوهش‌های انجام‌شده مقایسه گردیده است. معادله هذلولوی باکلی- لورت یا سیلابزنی^۲ با صرف‌نظر از اثر فشار مویینگی و ثقل در معادله جریان‌های دوفازی مطابق ذیل حاصل می‌گردد (۶):

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \left(u_t \frac{df_w}{dS_w} \right) \nabla S_w = q_w. \quad (55)$$

شبکه‌بندی برای این مدل در یک ستون افقی دامنه $\Omega = (0m, 100m) \times (0m, 1m)$ به‌صورت یکنواخت از نوع المان‌های مثلثی ساختاریافته شبه‌یک‌بعدی شامل ۶۰ و ۲۰۰ گره می‌باشد. در این مسأله از توابع نفوذپذیری نسبی بروکس و کری (2) و نسخه OBB پنالتی داخلی ($\sigma = 0$) گالرکین ناپیوسته استفاده می‌گردد. پارامترهای سیال و محیط متخلخل در این مسأله در جدول ۱ معرفی شده‌اند. شرایط مرزی و اولیه مسأله مطابق شکل ۵ عبارتند از:

$$P_{dir}^- = 1.1 \times 10^6 Pa,$$

$$S_{in} = 0.90(-), \text{ at } \Gamma_{in}$$

$$P_{dir}^+ = 1.0 \times 10^5 Pa \text{ at } \Gamma_{out},$$

$$P_w(., 0) = 1.0 \times 10^5 Pa,$$

$$S_w(t = 0) = 0.1(-)$$

$\bar{S}_{w,max,i}$ و کمینه $\bar{S}_{w,min,i}$ مقادیر گرهی به‌ترتیب بقای محلی و حذف اکسترم‌های محلی تحمیل می‌گردند:

$$\min \sum_{i=1}^{N_T} \frac{1}{2} \|S_{w,i} - \bar{S}_{w,i}\|_2, i = 1, \dots, N_T \quad \text{تابع هدف} \quad (51)$$

$$\bar{S}_{w,Ave} = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} \bar{S}_{w,i}, \quad \text{قید}$$

$$\bar{S}_{w,Ave} = \bar{S}_{w,Ave}, \quad T \in T_h. \quad (52)$$

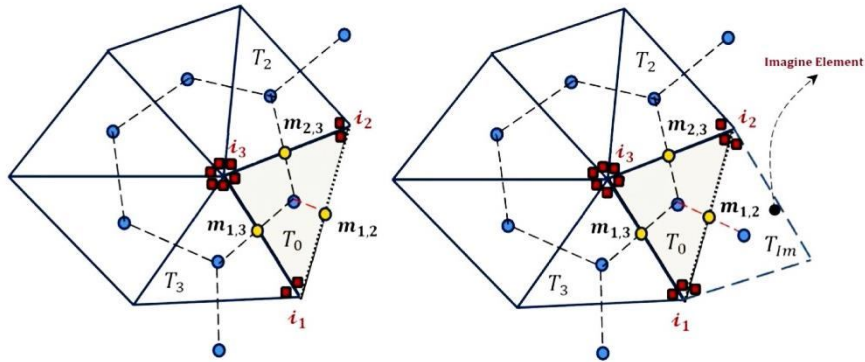
$$\bar{S}_{w,min,i} \leq \bar{S}_{w,i} \leq \bar{S}_{w,max,i}, \quad i = 1, \dots, N_T. \quad (53)$$

در قید سوم نیز متوسط مقدار روی هر وجه المان همسایه آن ($\bar{S}_{w,Ave}$ و \bar{S}_{w,Ave,T_0}) محدود گردد تا از ایجاد اکسترم‌های محلی احتمالی بر روی وجوه جلوگیری شود:

$$\min(\bar{S}_{w,Ave}, \bar{S}_{w,Ave,T_0}) \leq \bar{S}_{w,Ave,m} \leq \max(\bar{S}_{w,Ave}, \bar{S}_{w,Ave,T_0}) \quad (54)$$

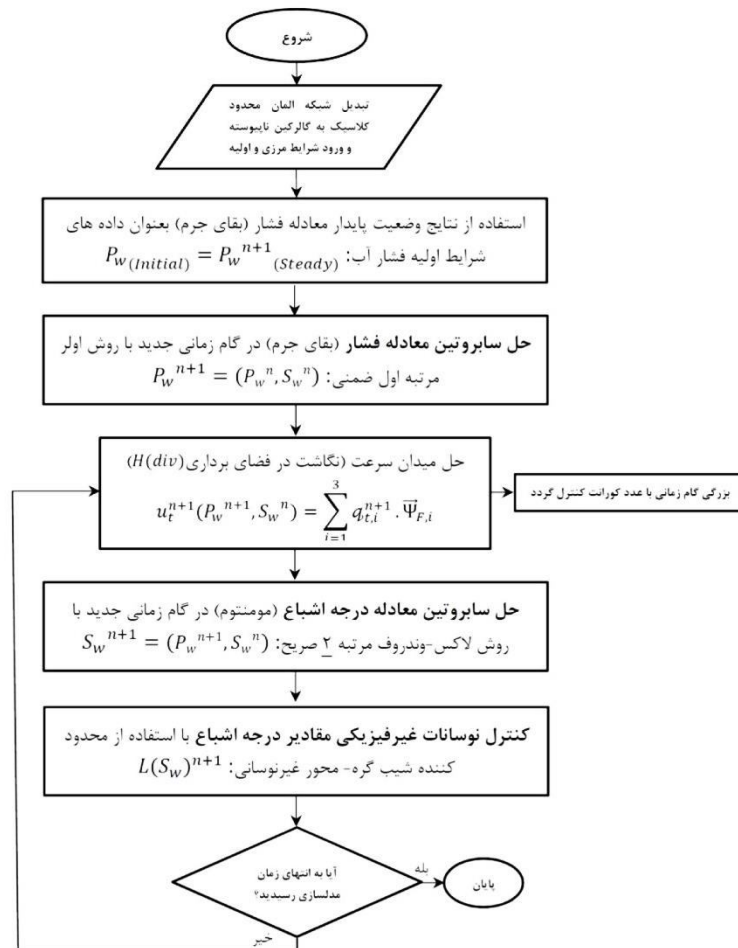
لازم به ذکر است، به‌منظور بهبود دقت مدل در المان‌های مرزی از تکنیک نگاشت انعکاسی و ساخت المان مجازی مجاور مطابق شکل ۳ استفاده شده است به‌طوری‌که در وجوه با شرط مرزی رابین بجای مقدار متوسط المان مجازی مجاور از درجه اشباع ورودی ($\bar{S}_{w,Im} = S_{in}$) و در وجوه با شرط نیومن به‌جای مقدار متوسط المان مجازی از متوسط درجه اشباع المان جاری ($\bar{S}_{w,Im} = \bar{S}_{w,T_0}$) استفاده می‌گردد (۹). در شکل ۴ نمودار گردش کار حل دستگاه معادلات حاکم بر انتقال آلاینده‌های امتزاج‌ناپذیر به روش لاکس- وندروف گالرکین ناپیوسته با استفاده از

1- Sparse matrix
2- Water flooding



شکل ۳- الگوی محدودکننده شیب شاونت- جافر در المان‌های مرزی برای وجوه با شرط مرزی رایبن (چپ) وجوه با شرط مرزی نیومن (راست).

Figure 3. The stencil of Modified Chavent & Jaffre slope limiter at boundary edges for robin B.C (Left) for Neumann B.C (Right).



شکل ۴- نمودار گردشی مدل سازی آلاینده های امتزاج ناپذیر با استفاده از روش لاکس-وندروف گالریکین ناپيوسته.

Figure 4. Flowchart of immiscible contaminations modeling using Lax-Wendroff DG scheme.

نتایج عددی حاصل مدل ارائه شده با تقسیمات ۶۰ گرهی در طول ستون افقی بعد از ۱۰۵ روز با نتایج حل تحلیلی و دو روش عددی کاملاً همبسته المان محدود (FCFEM) (۸) و مدل شبیه‌ساز TOUGH (۳۲) بر مبنای تفاضلات محدود مقایسه گردیدند.

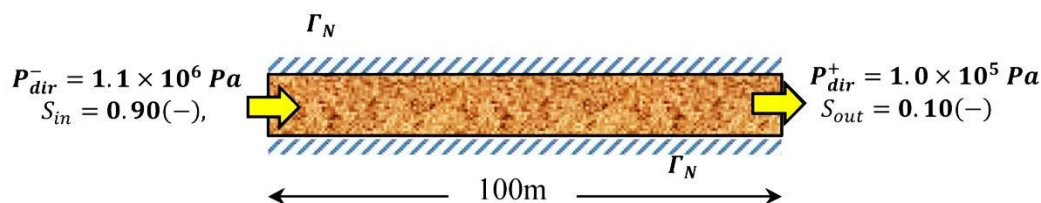
مقایسه نتایج در شکل ۷ نشان می‌دهد که نتایج مدل ارائه شده و کاملاً همبسته المان محدود (FCFEM) به‌ترتیب بهترین تطابق را با حل تحلیلی دارند. ولی نتایج مدل شبیه‌ساز TOUGH دارای پخش عددی می‌باشد و در قیاس با دو روش عددی دیگر از دقت کمتری برخوردار می‌باشد. با ریزتر نمودن شبکه تا ۲۰۰ گره نتایج شبیه‌ساز TOUGH بهبود خواهند یافت (۱۷).

در شکل ۶ نتایج فشار و درجه اشباع آب در مدل تهیه شده برای تقسیمات ۶۰ و ۲۰۰ گره در طول بازه ۱۰۰ متری برای مدت زمان‌های ۴۲، ۶۳، ۸۴ و ۱۰۵ روز نشان داده شده‌اند که پیشانی تیز بین دوفاز در شبکه ریزتر بهتر تسخیر شده است. مقایسه حل عددی با حل تحلیلی بعد از ۱۰۵ روز نشان می‌دهد که افزایش تعداد تقسیمات ستون افقی از ۶۰ گره به ۲۰۰ گره بهبود نتایج را نیز در پی خواهد داشت به‌طوری‌که مطابق جدول ۲، مقدار خطای نرم $(E_{L_2} = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^N (S_{w_{analytical}} - S_{w_{cal}})^2 dx)$ در آن به مراتب کم‌تر از پروفیل حاصل از شبکه درشت می‌باشد. با توجه به محدودیت عدد کورانت (CFL) طول بازه‌های زمانی $\Delta t = 0.05 \text{ days}$ تعیین شده است.

جدول ۱- مشخصات فیزیکی سیال و محیط متخلخل مسأله باکلی- لورت.

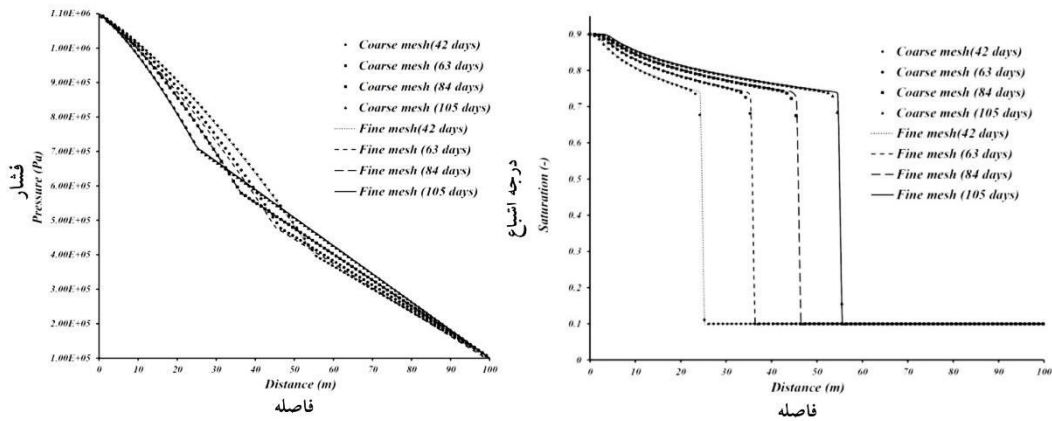
Table 1. Fluid and porous media physical properties for Buckley-Leverett problem.

مقدار Value	پارامتر Parameter	مقدار Value	پارامتر Parameter
0.0	$S_{rw}[-]$	0.15	ϕ
0.0	$S_{rn}[-]$	10^{-13}	$K[m^2]$
0.001	$\mu_w[kg/(ms)]$	1000	$P_d[Pa]$
0.001	$\mu_n[kg/(ms)]$	2.0	$\zeta[-]$



شکل ۵- هندسه و شرایط مرزی مسأله باکلی- لورت.

Figure 5. The geometry and boundary condition for Buckley-Leverett problem.



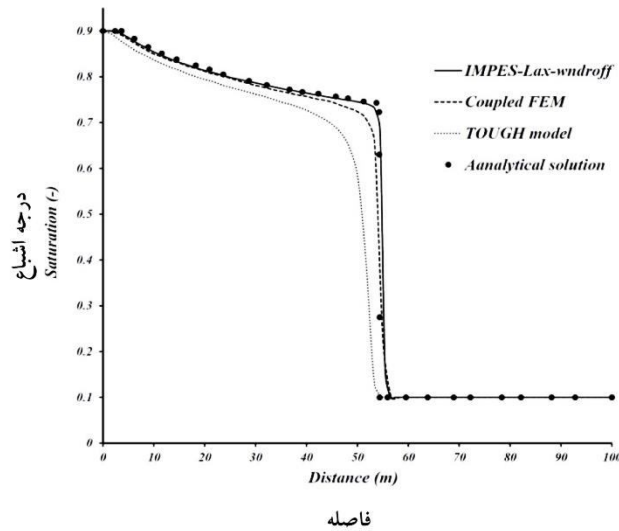
شکل ۶- مقایسه نتایج فشار و درجه اشباع آب در مدل تهیه شده برای دو نوع شبکه درشت و ریز بعد از ۴۲، ۶۳، ۸۴ و ۱۰۵ روز.

Figure 6. Comparing the water pressure and saturation results in developed model for coarse and fine mesh schemes after 42, 63, 84 and 105 days.

جدول ۲- خطای نرم (E_{L_2}) درجه اشباع پس از گذشت ۱۰۵ روز.

Table 2. The norm error for Saturation after 105 days.

$\Delta x = L/200$	$\Delta x = L/60$	(Norm Error) E_{L_2} نرم خطای
		(Convergence rate) ضریب همگرایی
0.0451	0.5904	E_{L_2}
3.7097	-	$\rho(S_w)$



شکل ۷- مقایسه نتایج درجه اشباع آب برای شبکه درشت در مدل تهیه شده با نتایج حل تحلیلی، مدل TOUGH و مدل همبسته الان محدود بعد از ۱۰۵ روز.

Figure 7. The developed model water saturation results Comparison with analytical solution, TOUGH and coupled FEM schemes for coarse mesh after 105 days.

روند احیاء آبخوان با استفاده از کانتورهای توزیع فشار آب و درجه اشباع آب در شکل‌های ۹ و ۱۰ به‌ازای ۱۵، ۳۰ و ۵۰ روز نشان داده شده‌اند. تحلیل نتایج نشان می‌دهد که در ناحیه تماس ناپیوستگی میانی آبخوان، توزیع درجه اشباع آب با وجود گرادیان‌های شدید، به‌علت استفاده از روش عددی دارای بقای محلی و روش‌های تثبیت‌کننده شار، دارای کم‌ترین پخش عددی می‌باشد.

در استراتژی IMPES ارائه شده برای حل معادلات حاکم، علاوه بر زمان کم‌تر در حل معادلات به واسطه استفاده از روش صریح مرتبه دوم لاکس-وندروف (در معادله اشباع) هم در هزینه محاسبات صرفه‌جویی می‌گردد و هم این‌که با وجود استفاده از درجه تقریب خطی در متغیرها، می‌توان به وضوح مناسبی از نتایج دست یافت. در شکل ۱۱ پروفیل‌های قطری فشار و درجه اشباع پیشروی آب در آبخوان را به‌ازای ۱۵، ۳۰ و ۵۰ روز نشان می‌دهد. همچنین با استفاده از رابطه ۴ می‌توان در هر لحظه، درجه اشباع آلاینده را در آبخوان به سهولت به‌دست آورد.

استفاده از توأمان خاصیت بقای محلی طرح پנالتی داخلی گالرکین ناپیوسته تثبیت شده و طرح لاکس-وندروف مرتبه بالا سبب شده تا محل تماس ناپیوستگی ناهمگنی میانی آبخوان در پروفیل‌های قطری فشار و درجه اشباع آب به وضوح مطلوبی نشان داده شود.

مسئله نمونه (۱): بخشی از یک آبخوان در یک میدان هیدروکربنی نفت با هندسه منظم Ω_1 مستقر شده است که در ناحیه میانی دامنه آن یک ناحیه بسیار ناهمگن (Ω_2) با نفوذپذیری ۱۰۰۰ برابر کم‌تر از محیط پیرامونی قرار گرفته است. حدود ۸۰ درصد از محیط متخلخل از مواد هیدروکربنی اشباع می‌باشد که به‌منظور احیاء آبخوان از آلودگی نفتی از گوشه جنوب غربی آن، آب با فشار $P_{dir}^- = 2.41 \times 10^6 Pa$ تزریق می‌گردد و در گوشه شمال‌شرقی مواد هیدروکربنی خارج می‌گردد. مشخصات فیزیکی محیط متخلخل در جدول ۳ خلاصه شده‌اند. شبکه المان‌بندی دامنه متشکل از ۱۹۰۲ المان بی‌سامان، تعداد ۱۰۰۰ گره و اندازه گام زمانی در معادله درجه اشباع $(\Delta t = days/30)$ می‌باشد. در این مسئله از نسخه پنالتی داخلی نامتقارن (SWIP) با مقدار پنالتی $(\sigma = 50)$ استفاده شده است. شرایط مرزی و اولیه مسئله نمونه شماره ۱ طبق شکل ۸ عبارتند از:

$$P_{dir}^- = 2.41 \times 10^6 Pa,$$

$$S_{in} = 0.95(-) \text{ at } \Gamma_{in}$$

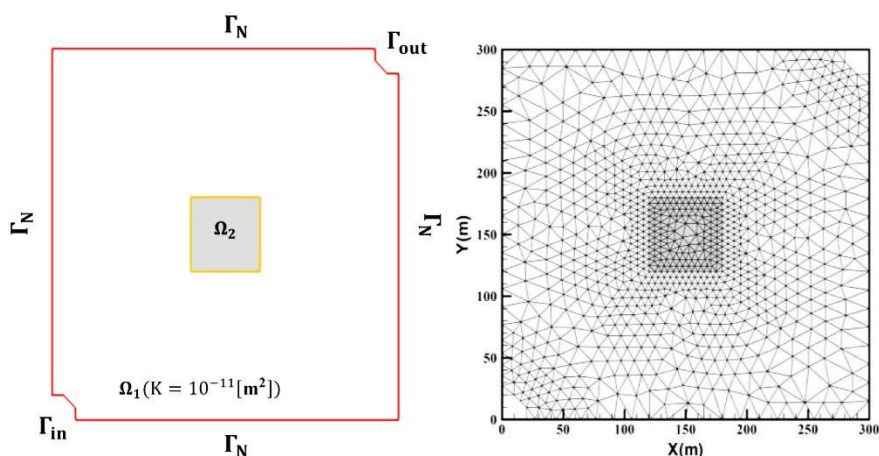
$$P_{dir}^+ = P_{dir}^- = 3.45 \times 10^6 Pa \text{ at } \Gamma_{out},$$

$$S_w(t = 0) = 0.2(-),$$

جدول ۳- مشخصات فیزیکی سیال و محیط متخلخل مسئله مک ورتر.

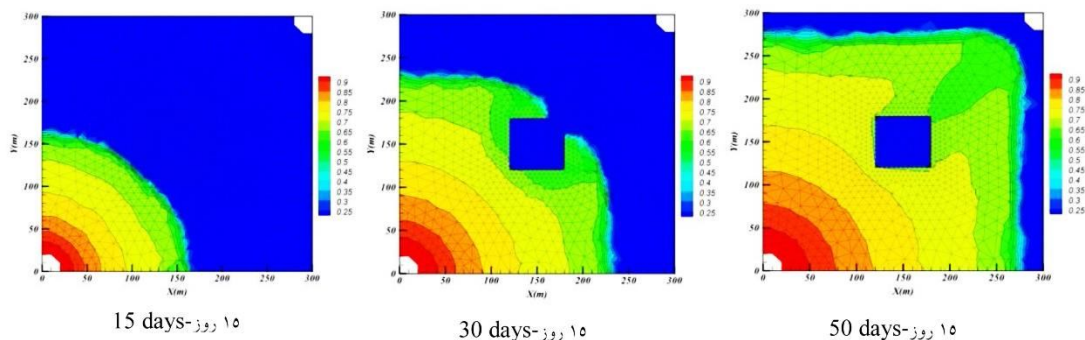
Table 3. Fluid and porous media physical properties for test case problem.

مقدار Value	پارامتر Parameter	مقدار Value	پارامتر Parameter
0.15	$S_{rw}[-]$	0.2	ϕ
0.0	$S_{rn}[-]$	$10^{-11} - 10^{-14}$	$K[m^2]$
0.0005	$\mu_w[kg/(ms)]$	5000	$P_d[Pa]$
0.002	$\mu_n[kg/(ms)]$	3.0	$\zeta[-]$



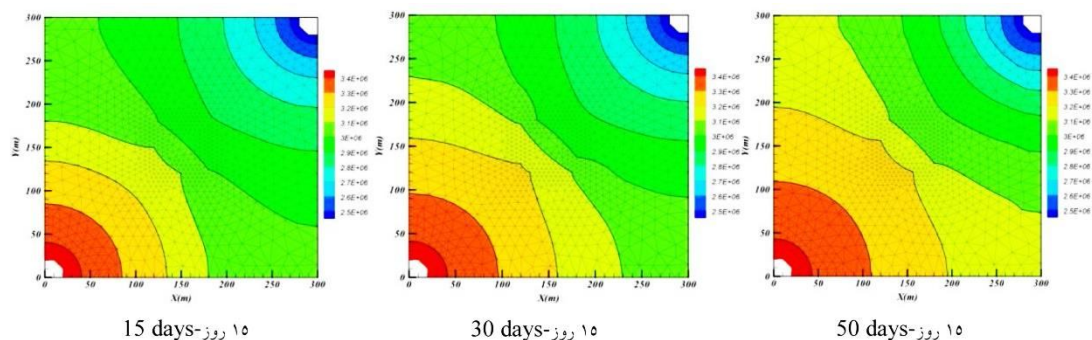
شکل ۸- هندسه، شرایط مرزی و المان‌بندی هندسه مسأله نمونه ۱.

Figure 8. The geometry, boundary condition and meshing for test case 1.



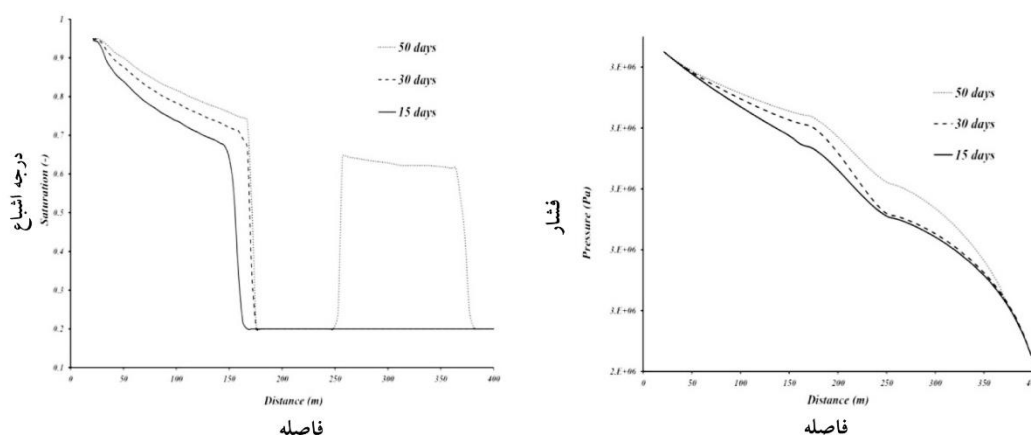
شکل ۹- کانتورهای درجه اشباع آب با استفاده از روش SWIP برای مدت ۱۵، ۳۰ و ۵۰ روز.

Figure 9. Water saturation (-) contours at 15, 30 and 50 days using SWIP scheme.



شکل ۱۰- کانتورهای فشار آب با استفاده از روش SWIP برای مدت ۱۵، ۳۰ و ۵۰ روز.

Figure 10. Water pressure (Pa) contours at 15, 30 and 50 days using SWIP scheme.



شکل ۱۱- پروفیل فشار و درجه اشباع آب در مدل تهیه شده بعد از ۱۵، ۳۰، ۵۰ روز.

Figure 11. The water pressure and saturation profile in developed model after 15, 30 and 50 days.

آب در طول مدت معین ۵۰ روز با نسبت ثابت آبخوان را تغذیه می‌نماید. پارامترهای فیزیکی محیط متخلخل و سیالات موجود، در جدول ۴ توصیف شده‌اند و شبکه المان‌بندی مثلثی آن از نوع بی سامان خطی با تعداد ۲۶۴۰ المان و تعداد گره‌ها ۱۳۱۹ عدد می‌باشد. در این مسأله از نسخه پنالتی داخلی نامتقارن (SWIP) با مقدار پنالتی $(\sigma = 100)$ و اندازه گام زمانی در معادله درجه اشباع $(\Delta t = day/60)$ استفاده شده است. همچنین نحوه توزیع نفوذپذیری ذاتی در شکل ۱۳ نمایش داده شده است.

تحلیل نتایج مدل شامل کانتورهای فشار و درجه اشباع به‌ازای ۱۲/۵، ۲۵، ۳۷/۵ و ۵۰ روز در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نمایش داده شده است. تحلیل کانتورهای درجه اشباع در شکل ۱۴ نحوه توزیع جریان انگشتی را به‌خوبی و با وضوح مناسبی به‌علت تغییرات نفوذپذیری و تخلخل در مدت زمان‌های مشخص نشان می‌دهد. شایان ذکر است در آبخوان مورد بررسی، مدت زمان رخنه یا مدت زمان رسیدن موج آب به محل برداشت آلاینده حدود ۷۰ روز می‌باشد.

مسأله نمونه (۲): در یک آبخوان غیرهمگن با نفوذپذیری بسیار تصادفی با دامنه Ω مطابق شکل (۱۲)، در اثر نشت آلاینده تتراکلرید سدیم اشباع گردیده است. به‌منظور احیاء آبخوان از منبع نزدیک به رودخانه (در مرز ورودی Γ_{in}) آب به داخل آن تزریق می‌گردد و از مرز انتهایی تحتانی (مرز خروجی Γ_{out}) مواد آلاینده امتزاج‌ناپذیر با استفاده از چاه برداشت، خارج می‌گردد. سایر مرزهای آبخوان از نوع نفوذناپذیر می‌باشند و شرایط مرزی و اولیه آن عبارتند از:

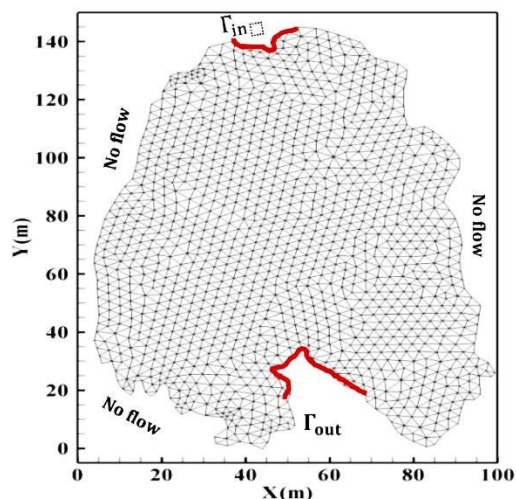
$$P_{dir}^- = 1.3 \times 10^6 \text{ Pa},$$

$$S_{in} = 0.90(-), \text{ at } \Gamma_{in}$$

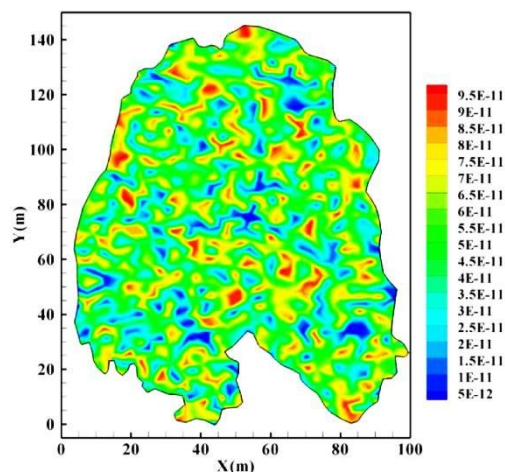
$$P_{dir}^+ = 6.0 \times 10^5 \text{ Pa at } \Gamma_{out},$$

$$P_w(.,0) = 6.0 \times 10^5 \text{ Pa},$$

$$S_w(t = 0) = 0.1(-)$$



شکل ۱۲- المان بندی هندسه مسأله و شرایط مرزی در آبخوان مسأله نمونه ۲.
 Figure 12. The meshing geometry and boundary condition in aquifer test case 2.

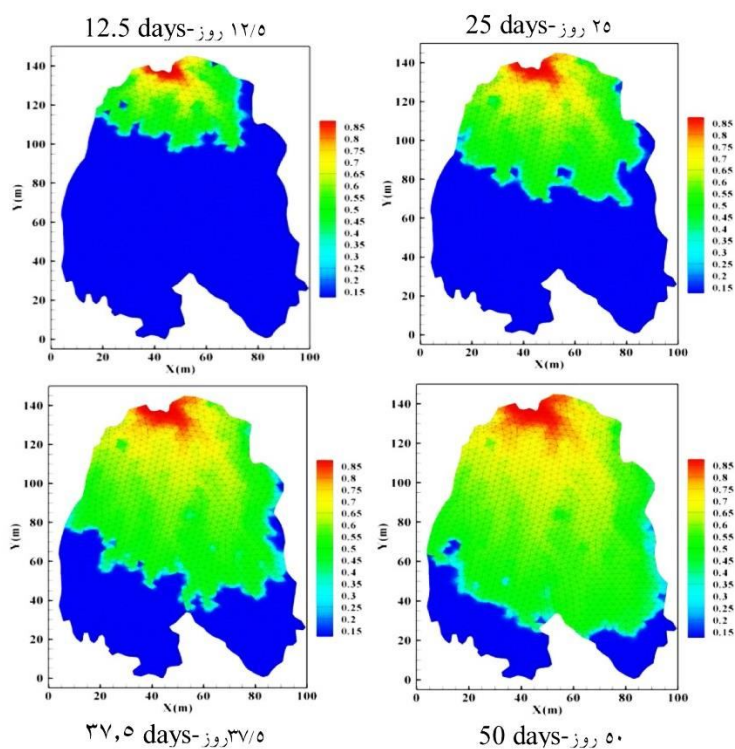


شکل ۱۳- توزیع نفوذپذیری تصادفی ذاتی $K \in (10^{-12} - 10^{-10} m^2)$ برای مسأله نمونه (۲).
 Figure 13. The randomized intrinsic Permeability distribution $K \in (10^{-12} - 10^{-10} m^2)$ for the test case (2).

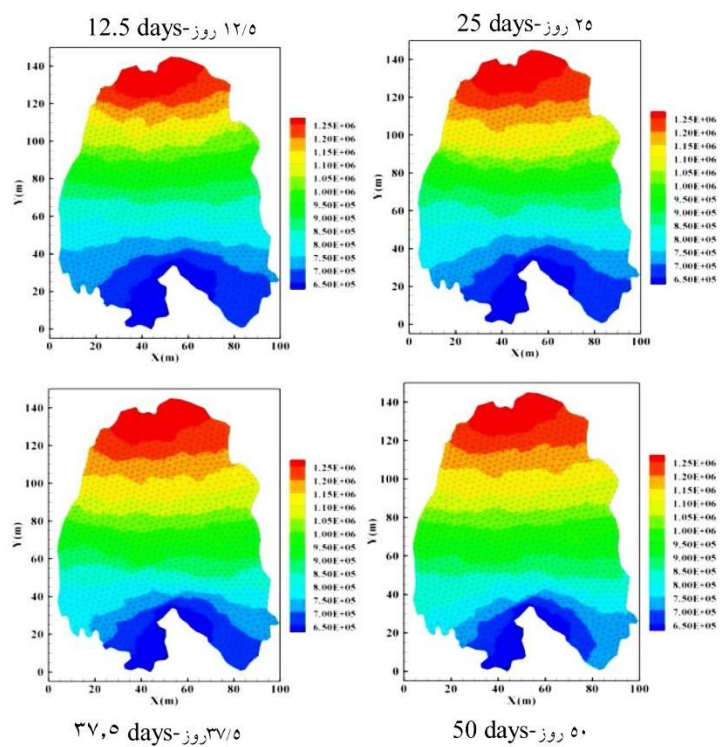
جدول ۴- مشخصات فیزیکی سیال و محیط متخلخل مسأله نمونه ۲.

Table 4. Fluid and porous media physical properties for test case 2.

مقدار Value	پارامتر Parameter	مقدار Value	پارامتر Parameter
0.0	$S_{rw}[-]$	0.02-0.3	ϕ
0.0	$S_{rn}[-]$	$10^{-12} - 10^{-10}$	$K[m^2]$
0.001	$\mu_w[kg/(ms)]$	1000	$P_d[Pa]$
0.01	$\mu_n[kg/(ms)]$	2.0	$\zeta[-]$



شکل ۱۴- کانتورهای درجه اشباع آب در آبخوان با استفاده از روش SWIP برای مدت ۱۲/۵، ۲۵، ۳۷/۵ و ۵۰ روز.
 Figure 14. The water saturation (-) contours at 15, 30 and 50 days in aquifer using SWIP scheme.



شکل ۱۵- کانتورهای فشار آب در آبخوان با استفاده از روش SWIP برای مدت ۱۲/۵، ۲۵، ۳۷/۵ و ۵۰ روز.
 Figure 15. The water pressure (Pa) contours at 15, 30 and 50 days in aquifer using SWIP scheme.

این مدل با استفاده از روش‌های پنالتی داخلی گالرکین ناپیوسته المان محدود تهیه شده است. تحلیل نتایج در مدل بیانگر آنست که:

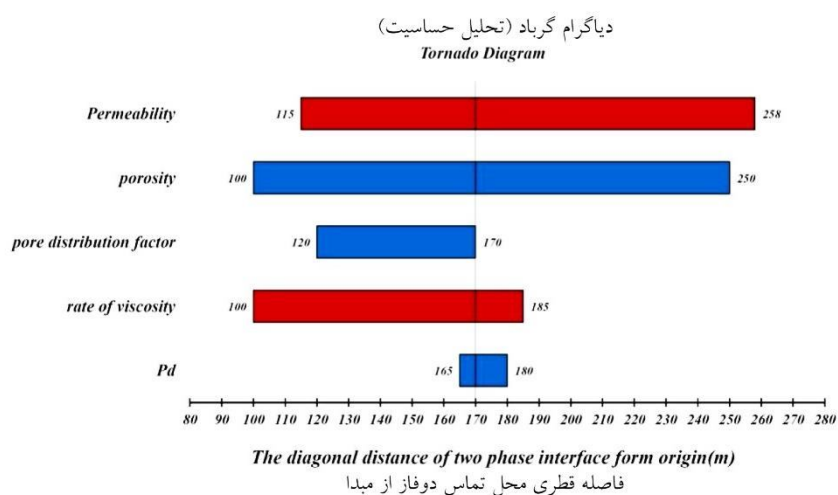
- استفاده از گسسته‌سازی زمانی مرتبه بالای لاکس-وندروف در استراتژی IMPES در عین آن‌که زمان اجرای مدل را نسبت به استراتژی حل‌های متوالی کاهش می‌دهد، دقت نتایج را نیز در حد مطلوبی حفظ می‌نماید. استفاده از گسسته‌سازی مرتبه بالای لاکس-وندروف موجب شده تا با وجود استفاده از درجه تقریب مرتبه پایین خطی در متغیرهای مدل بتوان به تقریب مناسبی از آن‌ها دست یافت.
- روش‌های تثبیت شامل استفاده از عملگر متوسط وزنی و نگاشت میدان سرعت در گسسته‌سازی مکانی موجب شده تا مانع از ایجاد نوسان‌های غیرفیزیکی شده و در ناپیوستگی‌ها و ناهمگنی دقت نتایج در حد مطلوبی حفظ گردد.
- استفاده از تکنیک مقیاس‌شدگی ترم پنالتی حساسیت انتخاب مقدار پنالتی را تا حدود بسیاری کاهش می‌دهد.
- بقای محلی و پیوستگی بردار نرمال میدان سرعت به‌علت استفاده از مفهوم المان محدود ترکیبی در پردازش و نگاشت میدان سرعت، در مرزهای ناهمگنی حفظ می‌گردد و این خود عامل کاهش شدید پخش عددی در نتایج مقادیر درجه اشباع می‌باشد.
- نتایج حاصل از تحلیل حساسیت مدل نشان می‌دهد تغییرات ضریب نفوذپذیری و درجه تخلخل بیش‌ترین تأثیر و فشار موینگی ورودی کم‌ترین تأثیر را در مدل دارد.

تحلیل حساسیت مدل: تحلیل حساسیت مدل، ابزاری مناسب برای بررسی واکنش‌های مدل به تغییرات پارامترهای مرتبط با آن می‌باشد که در این بخش به آن پرداخته خواهد شد. به‌منظور تحلیل حساسیت مدل تهیه شده در محیط‌های متخلخل، برخی از پارامترهای مهم مانند ضریب نفوذپذیری (K)، ضریب توزیع حفرات (ξ)، ضریب تخلخل (ϕ)، فشار موینگی ورودی (P_d)، نسبت گرانروی سیالات (α) برای مسأله نمونه ۱ بعد از گذشت ۱۵ روز مورد بررسی گرفته است.

فاصله قطری محل سطح تماس دو فاز امتزاج‌ناپذیر از مبدا مختصات به‌عنوان شاخص لحاظ گردیده است. شکل ۱۶ دیاگرام گرباد^۱ میزان تأثیرگذاری متغیرها را به وضوح نشان می‌دهد. محل تماس دو فاز امتزاج‌ناپذیر در مسأله نمونه ۱ و به‌ازای مقادیر جدول ۳ در فاصله ۱۷۰ متری آن تشکیل می‌گردد که به‌عنوان مبدأ دیاگرام گرباد در متغیرهای مؤثر تلقی می‌گردد. مطابق دیاگرام گرباد، نفوذپذیری ذاتی، تخلخل، ضریب توزیع حفرات خاک و نسبت گرانروی به‌ترتیب، مؤثرترین پارامترهای مدل محسوب می‌گردند.

نتیجه‌گیری و بحث

مدل تهیه شده در این پژوهش به‌منظور پیش‌بینی رفتار آبخوان‌ها در قبال آلاینده‌های امتزاج‌ناپذیر، احیاء آبخوان‌ها از آلاینده‌ها و همچنین رفتار مخازن نفت در مرحله احیاء ثانویه مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. ترکیب به‌کار رفته در مدل‌سازی عددی برای اولین بار ارائه شده که امکان حصول نتایج با وضوح مطلوب و بدون پخش عددی را حتی در آبخوان‌های بسیار ناهمگن و با شبکه‌های نه‌چندان ریز فراهم می‌نماید.



شکل ۱۶- دیاگرام گردباد برای بررسی تأثیر متغیرهای ۵ گانه مهم در مسأله نمونه ۱.

Figure 16. Tornado diagram description for evaluate the effect of five important variables in test case 1.

منابع

1. Amaziane, B., and Jurak, M. 2008. A new formulation of immiscible compressible two-phase flow in porous media, *Comptes Rendus Mécanique*, 336: 7. 600-605.
2. Amaziane, B., Pankratov, L., and Piatnitski, A. 2017. An improved homogenization result for immiscible compressible two-phase flow in porous media, *NHM*, 12: 1. 147-171.
3. Arbogast, T., Juntunen, M., Pool, J., and Wheeler, M.F. 2013. A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in a porous medium enforcing H (div) velocity and continuous capillary pressure, *Computational Geosciences*, 17: 6. 1055-1078.
4. Bastian, P., and Riviere, B. 2004. Discontinuous Galerkin methods for two-phase flow in porous media, Technical Reports of the IWR (SFB 359) of the Universität Heidelberg.
5. Brooks, R., and Corey, T. 1964. Hydraulic Properties of Porous Media. Colorado State University.
6. Buckley, S.E., and Leverett, M. 1942. Mechanism of fluid displacement in sands, *Transactions of the AIME*, 146: 1. 107-116.
7. Bürger, R., Kenettinkara, S.K., and Zorío, D. 2017. Approximate Lax-Wendroff discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws, *Computers and Mathematics with Applications*, 74: 6. 1288-1310.
8. Burri, A. 2004. Implementation of a multiphase flow simulator using a fully upwind galerkin method within the CSP multiphysics toolkit, Unpublished Diploma Thesis, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Switzerland.
9. Chavent, G., and Jaffré, J. 1986. Mathematical models and finite elements for reservoir simulation: single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media. Elsevier.
10. Di Pietro, D.A., and Ern, A. 2011. Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods. Springer 69.
11. Donea, J. 1991. Generalized Galerkin methods for convection dominated transport phenomena, *Applied Mechanics Reviews*, 44: 5. 205-214.
12. Donea, J. 1984. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems, *Inter. J. Num. Method. Engin.* 20: 1. 101-119.
13. Donea, J., Giuliani, S., Laval, H., and Quartapelle, L. 1984. Time-accurate solution of advection-diffusion problems by finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45: 1-3. 123-145.

14. Donea, J., Quartapelle, L., and Selmin, V. 1987. An analysis of time discretization in the finite element solution of hyperbolic problems, *J. Com. Physic.* 70: 2. 463-499.
15. Ern, A., Stephansen, A.F., and Zunino, P. 2008. A discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection–diffusion equations with locally small and anisotropic diffusivity, *IMA J. Num. Anal.* 29: 2. 235-256.
16. Eslinger, O.J. 2005. Discontinuous galerkin finite element methods applied to two-phase, air-water flow problems, Ph.D Thesis, University of Texas at Austin.
17. Geiger Boschung, S. 2004. Numerical simulations of the hydrodynamics and thermodynamics of NaCl-H₂O fluids, Ph.D Thesis, ETH Zurich.
18. Gottlieb, S. 2005. On high order strong stability preserving Runge-Kutta and multi step time discretizations, *J. Sci. Com.* 25: 1. 105-128.
19. Gottlieb, S., Ketcheson, D.I., and Shu, C.W. 2009. High order strong stability preserving time discretizations, *J. Sci. Com.* 38: 3. 251-289.
20. Gottlieb, S., Shu, C.W., and Tadmor, E. 2001. Strong stability-preserving high-order time discretization methods, *SIAM review*, 43: 1. 89-112.
21. Hadad, A., Bensabat, J., and Rubin, H. 1996. Simulation of immiscible multiphase flow in porous media: a focus on the capillary fringe of oil-contaminated aquifers, *Transport in porous media*, 22: 3. 245-269.
22. Hoteit, H., Ackerer, P., Mosé, R., Erhel, J., and Philippe, B. 2004. New two-dimensional slope limiters for discontinuous Galerkin methods on arbitrary meshes, *Inter. J. Num. Method. Engin.* 61: 14. 2566-2593.
23. Jamei, M., Raeisi Isa Abadi, A., and Ahmadianfar, I. 2019. A Lax–Wendroff-IMPES scheme for a two-phase flow in porous media using interior penalty discontinuous Galerkin method, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 75: 5. 325-346.
24. Jamei, M., and Ghafouri, H. 2016. An efficient discontinuous Galerkin method for two-phase flow modeling by conservative velocity projection, *Inter. J. Num. Method. Heat & Fluid Flow*, 26: 1. 63-84.
25. Jamei, M., and Ghafouri, H. 2016. A novel discontinuous Galerkin model for two-phase flow in porous media using an improved IMPES method, *Inter. J. Num. Method. Heat Fluid Flow*, 26: 1. 284-306.
26. Jamei, M., and Ghafouri, H.R. 2016. A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media using modified MLP slope limiter, *Modares Mechanical Engineering*, 15: 12. 326-336.
27. Kirby, R.C. 2004. Algorithm 839: FIAT, a new paradigm for computing finite element basis functions, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 30: 4. 502-516.
28. Klieber, W., and Riviere, B. 2006. Adaptive simulations of two-phase flow by discontinuous Galerkin methods, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196: 1. 404-419.
29. Kou, J., and Sun, S. 2010. A new treatment of capillarity to improve the stability of IMPES two-phase flow formulation, *Computers & Fluids*, 39: 10. 1923-1931.
30. Kubatko, E.J., Dawson, C., and Westerink, J.J. 2008. Time step restrictions for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods on triangular grids, *J. Com. Physic.* 227: 23. 9697-9710.
31. Osborne, M., and Sykes, J. 1986. Numerical modeling of immiscible organic transport at the Hyde Park landfill, *Water Resources Research*, 22: 1. 25-33.
32. Pruess, K. 1991. TOUGH2-A general-purpose numerical simulator for multiphase fluid and heat flow.
33. Raeisi Isaabadi, A., Ghafouri, H.R., and Rostamy, D. 2017. A new numerical method based on discontinuous galerkin for simulation of seawater intrusion into coastal aquifers, *Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources*, 24: 4. 23-41.

34. Riaz, A., and Tchelepi, H.A. 2006. Numerical simulation of immiscible two-phase flow in porous media, *Physics of Fluids*, 18: 1. 014104.
35. Rivière, B. 2008. Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations: theory and implementation. Society for Industrial and Applied Mathematics.
36. Roig, B. 2007. One-step Taylor–Galerkin methods for convection–diffusion problems, *J. Com. Appl. Math.* 204: 1. 95-101.
37. Shu, C.W. 1988. Total-variation-diminishing time discretizations, *SIAM J. Sci. Stat. Com.* 9: 6. 1073-1084.
38. Toulorge, T., and Desmet, W. 2011. CFL conditions for Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods on triangular grids, *J. Com. Physic.* 230: 12. 4657-4678.
39. Van Genuchten, M.T., and Nielsen, D. 1985. On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils, *Ann. Geophys.* 3: 5. 615-628.



Gorgan University of Agricultural
Sciences and Natural Resources

J. of Water and Soil Conservation, Vol. 26(2), 2019

<http://jwsc.gau.ac.ir>

DOI: 10.22069/jwsc.2019.15769.3096

A Numerical IMPES Discontinuous Galerkin method for Immiscible Groundwater Contaminations Flow Using Lax-Wendroff scheme

***M. Jamei¹, I. Ahmadianfar² and A. Raeisi Isa Abadi³**

¹Assistant Prof., Faculty of Engineering, Shohadaye Hoveizeh University of Technology, Susangerd,

²Assistant Prof., Faculty of Engineering, Khatam-Al Anbia University of Technology, Behbahan,

³Assistant Prof., Faculty of Agriculture, University of Shahrekord, Shahrekord

Received: 10.21.2018; Accepted: 01.27.2019

Abstract

Background and Objectives: The numerical modeling of the immiscible flows in the porous media is one of the issues which have always been considered by researchers due to their application in the monitoring of the groundwater pollutions, water and oil behavior in the petroleum reservoirs and hydrology sciences. In this study, we present a two-dimensional discontinuous Galerkin numerical model of immiscible flows in a porous media using the high order implicit pressure-explicit saturation (IMPES) strategy for governing equations. Here, the primary unknowns are wetting phase-pressure and saturation. In this hybrid numerical scheme, for the first time we developed the second-order Lax-Wendroff method to solve the water saturation equation which is considered as the main novelty of this paper.

Materials and Methods: For the numerical modeling of immiscible groundwater pollutions, it has been utilized the local conservative discontinuous Galerkin scheme as the spatial discretization. The backward Euler and second-order Lax-Wendroff scheme are applied as temporal discretization for pressure and saturation equations respectively. Also, we stabilized the exchanging numerical flux and used projection of the velocity field in the $H(\text{div})$ vectorial interpolation space for improvement of results at the heterogeneities. At the end of each time step, non-physical oscillations omitted using modified Chaven-Jaffre slope limiter and the results are stabilized.

Results: The second-order Lax-Wendroff scheme based on the Taylor expansion and the high order time derivatives is comparable with conventional IMPES strategy schemes such as multi stage Runge-kutta Method (RKDG) while has less computation cost than multi stage schemes. However, the time step size and the Courant number have some restrictions with respect to the explicit solving of the saturation equation.

Conclusion: In order to validation of the model, the Buckley-Leverett benchmark problem is considered. The results of the developed model are compared with of other authors and a good agreement is observed between them. Also, model efficiency and ability have been evaluated with two test cases for high heterogeneous aquifers. Also employing various techniques improved the discontinuities resolution in highly heterogeneous media. Numerical models showed good non-oscillatory resolution of saturation around the less permeable subdomains and frontal interface between the wetting and nonwetting phases. In this study, the penalty parameter varies between 50 and 100. In SWIP version of DG method, the penalty parameter should be chosen greater than 50 while in OBB-DG method zero values could be allocated. The sensitivity analysis of the model has been considered for various effective parameters in modeling.

Keywords: Immiscible Flows, Implicit pressure-explicit saturation, Interior Penalty, Lax-Wendroff Scheme, Unstructured Elements

* Corresponding Author; Email: mehdi.jamei@shhu.ac.ir

