نشریه پژوهش‌های حفاظت آب و خاک
جلد بیست و سوم، شماره دوم، ۱۳۹۵
http://jwsc.gau.ac.ir

پیش‌بینی کیفیت آب در جریان‌های یک‌بعدی به کمک تابع انتقال آلودگی جدید و اصلاح معیار همگرایی

*سیدآرمان هاشمی‌منفرد[۱]، محسن دهقانی درمیان[۲]، بهاره پیرزاده[۱] و مهدی اژدری‌مقدم[۳]

[۱]استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، [۲]دانشجوی دکتری گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، [۳]دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

تاریخ دریافت: ۹۴/۳/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۹۴/۷/۲۱

چکیده

سابقه و هدف: با توجه به کمی نزولات جوی و ذخیره آبی در سطح کشور، مطالعه رفتار آلودگی آب بسیار اهمیت دارد. جهت مطالعه این پدیده از معادله انتقال- پخش آلودگی در جریان‌های یک‌بعدی استفاده می‌شود. دو نوع روش شامل روش تحلیلی و روش عددی برای حل این معادله وجود دارد که در سال‌های اخیر با پیشرفت سیستم‌های کامپیوتری خطاهای روش‌های عددی برای پیش‌بینی هرچه بهتر واقعیت به حداقل رسیده است. بعضی پژوهشگران روش دوبعدی عددی برای انتقال آلودگی ارائه کردند و آن را با نتایج یک مدل آزمایشگاهی صحت‌سنجی کردند. در برخی پژوهش‌ها از روش کوئیک برای حل عددی معادله انتقال استفاده کردند و دریافتند که این روش تطابق خوبی با داده‌های آزمایشگاهی دارد و همچنین نتیجه گرفتند که روش‌های تحلیلی یک ابزار نسبتا مطمئن برای ارزیابی سایر روش‌های شبیه‌سازی و پیش‌بینی حرکت آلودگی در منابع آب سطحی می‌باشند. در نهایت در تعدادی از مطالعات، پیرامون قیود همگرایی برای روش‌های عددی مختلف حل معادله انتقال بحث شد که مقدار این قید در حداکثر حالت خود، عدد کورانت بین صفر و یک می‌باشد و اگر این مقدار بیش از یک شود، نتایج روش واگرا می‌شود. هدف این پژوهش ارائه یک تابع انتقال آلودگی است که بتواند با حفظ ویژگی‌های مثبت روش‌های پیشین، قیود واگرایی موجود را اصلاح کند.

مواد و روش‌ها: در این مقاله یک مطالعه موردی فرضی که داده‌های آن در رنج داده‌های واقعی است، انتخاب شد و ابتدا بروش تحلیلی و سپس به سایر روش‌های عددی موجود شامل لاکس، فروم، کوئیک و سایر توابع حالت درجه سه و چهار در برنامه MATLAB، کدنویسی شد. از روش حل تحلیلی به‌عنوان معیار صحت‌سنجی استفاده شد. از نرم‌افزار MAPLE نیز برای انجام محاسبات ریاضی تابع انتقال جدید پیشنهادی (تابع نمایی ساده) استفاده شد.

یافته‌ها: نتایج نشان داد روش عددی کوئیک و سایر روش‌های عددی ذکر شده فقط هنگامی همگرا می‌شوند و دارای جواب هستند که عدد کورانت در آن‌ها کم‌تر از یک باشد که این امر باعث محدودیت‌هایی در انتخاب طول گام مکانی و زمانی می‌شود. به همین دلیل برای رفع این مشکل یک تابع انتقال جدید به نام تابع نمایی ساده برای انتقال

* مسئول مکاتبه: hashemi@eng.usb.ac.ir

آلودگی در آب‌های کم‌عمق پیشنهاد شد. چرا که، اولاً این تابع در اعداد کورانت کم‌تر از یک، جوابی مشابه روش تحلیلی و روش عددی مرسوم و برتر کوئیک دارد و ثانیاً معیار همگرایی عدد کورانت را از عدد یک تا عدد دو افزایش می‌دهد.

نتیجه‌گیری: تابع انتقال جدید به نام تابع نمایی ساده که در این پژوهش پیشنهاد و ارائه شد، تابعی مناسب برای انجام فرایند انتقال آلودگی می‌باشد که علاوه بر تطابق با روش تحلیلی و روش‌های عددی گذشته، معیار همگرایی این روش‌ها را اصلاح کرده و بهبود می‌بخشد.

واژه‌های کلیدی: معادله انتقال- پخش، روش‌های عددی، روش تحلیلی، روش کوئیک، تابع نمایی ساده

مقدمه

متأسفانه امروزه با پیشرفت صنعت و تکنولوژی، آب‌های سطحی و رودخانه‌ها اکثراً به‌عنوان تخلیه‌گاه اصلی و عمده فاضلاب و پساب ناشی از فعالیت‌های صنعتی، کشاورزی به‌کار گرفته می‌شوند. این امر، باعث کاهش کیفیت منابع آبی برای مصارف مختلف در پایین‌دست رودخانه‌ها می‌شود. در نتیجه باید هزینه زیادی صرف تصفیه و بالابردن وضع کیفی آب در حد قابل‌قبول کرد. برای مطالعه و پژوهش در مورد انتقال آلاینده در رودخانه‌ها باید با معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی آشنا شد. روش‌های عددی انتقال آلودگی نیز بر پایه همین معادله یک‌بعدی انتقال می‌باشند و با در نظر گرفتن ترم‌های انتقال، پخش و چشمه- چاهک فرایند انتقال را انجام می‌دهند. پژوهشگران بسیاری از معادله انتقال در آب‌های کم‌عمق و سطحی برای شبیه‌سازی فرایند انتقال آلودگی استفاده کرده‌اند. در چند دهه گذشته روش‌های مختلفی بر پایه مشاهدات آزمایشگاهی، روش‌های تحلیلی و مدل‌های عددی برای توصیف و پیش‌بینی حرکت آلودگی در آب‌های سطحی توسعه یافته‌اند. توسعه و پیشرفت سیستم‌های کامپیوتری از یک‌سو و گسترش روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل از سوی دیگر باعث شده است که حل معادلات انتقال آلودگی در جریان‌های یک‌بعدی و حتی در شرایط پیچیده مرزی امکان‌پذیر باشد. در همین راستا یاداو و همکاران (۲۰۱۰) معادله انتقال و پخش همراه با ترم زوال را به‌صورت تحلیلی حل کردند و تعیین کردند که یک آلودگی مشخص بعد از گذشت چه زمان و مکانی زوال می‌یابد (۱۴). سینگ و همکاران (۲۰۱۲) در پژوهش خود مکانیزم انتقال- پخش را در یک آبراهه کوچک بررسی و جهت حل معادلات حاکم بر این پدیده از روش حجم کنترل در تفاضلات محدود استفاده نمود و نتایج خود را با حل تحلیلی مقایسه کردند (۱۲). یوشیکا و یونامی (۲۰۱۳) اثر انتقال آلودگی را با توجه به پخش آشفته و معادلات غیرخطی انتقال بررسی کردند (۱۵). کومار و همکاران (۲۰۰۹) با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادله یک‌بعدی انتقال- پخش همراه با ترم واکنش را در حالت غیرماندگار و با ضریب پخش متغیر حل کردند و نتیجه گرفتند روش حل تحلیلی ابزار خوبی برای صحت‌سنجی روش‌های عددی است (۹). کامفوییس (۱۹۹۱) برای بررسی میزان انطباق معادلات حاکم و حل عددی و تحلیلی این معادلات با پدیده‌هایی که در طبیعت اتفاق می‌افتد، باید آن را با یک مثال واقعی آزمایشگاهی کنترل کرد و به‌منظور کالیبره کردن و صحت‌سنجی مدل عددی از داده‌های آزمایشگاهی کمک گرفت (۷). گلس و ردی (۱۹۸۲) روش دوبعدی عددی برای انتقال آلودگی ارائه کردند و آن را با نتایج یک مدل آزمایشگاهی صحت‌سنجی کردند (۵). فالکونر و لیو (۱۹۸۸) از روش کوئیک برای حل عددی معادله انتقال استفاده کردند و دریافتند که این

روش تطابق خوبی با داده‌های آزمایشگاهی دارد (۴). زوپو و نایت (۱۹۹۷) با ثابت در نظر گرفتن سرعت جریان و پایدار ماندن پروفیل جریان حل تحلیلی برای معادله انتقال ارائه نمودند (۱۷). هافمن و چیانگ (۲۰۰۰) در بخشی از کتاب خود تحت عنوان دینامیک سیالات محاسباتی، درمورد قیود همگرایی برای روش‌های عددی مختلف حل معادله انتقال بحث می‌کنند که مقدار این قید در حداکثر حالت خود، عدد کورانت بین صفر و یک می‌باشد و اگر این مقدار بیش از یک شود، نتایج روش واگرا می‌شود (۶). کیم و همکاران (۲۰۱۱) مقایسه‌ای بین حل عددی و تحلیلی معادله انتقال و همچنین معادله انتقال پخش انجام دادند و برای صحت‌سنجی آن را با داده‌های آزمایشگاهی پژوهشگران پیشین مقایسه کردند و نتیجه گرفتند که روش‌های تحلیلی یک ابزار نسبتاً مطمئن برای ارزیابی سایر روش‌های شبیه‌سازی و پیش‌بینی حرکت آلودگی در منابع آب سطحی می‌باشند (۸). لی و دافی (۲۰۱۲) و اسچمال و رهمان (۲۰۱۴) از چند مدل برای انتقال آلودگی در یک اکوسیستم آبی استفاده کردند و در پایان نتایج را با داده‌های آزمایشگاهی صحت‌سنجی نمودند (۱۰، ۱۱). در این مقاله ابتدا به‌منظور تعیین روش عددی برتر یک مقایسه بین روش‌های عددی موجود انتقال آلودگی با روش حل تحلیلی صورت گرفت. سپس به‌منظور رسیدن به هدف اصلی این پژوهش برای افزایش قید همگرایی روش‌های عددی (عدد کورانت)، یک تابع انتقال جدید به نام تابع نمایی ساده پیشنهاد شد. در فرایند انتقال با استفاده از این تابع می‌توان اولاً در اعداد کورانت کم‌تر از یک جواب‌های مشابه روش عددی برتر یعنی روش عددی کوئیک گرفت و ثانیاً در اعداد کورانت بالاتر از یک تا دو، نیز فرایند انتقال را بدون واگرایی انجام داد. در نتیجه تابع نمایی ساده توانست معیار همگرایی روش‌های عددی را به عدد کورانت دو، افزایش دهد. تمامی این برنامه‌نویسی‌ها توسط دو نرم‌افزار قوی کدنویسی MATLAB و MAPLE انجام گرفت.

مواد و روش‌ها

انواع منابع آلودگی: در دنیا اکثر منابع آب و رودخانه‌ها با آلودگی‌های مختلف در تماس هستند. مطالعه در مورد خواص این آلودگی‌ها و انجام اقدامات لازم به‌منظور حذف این آلودگی‌ها برای دست یافتن به آب با کیفیت لازم، متناسب با مصارف مختلف بسیار مهم می‌باشد. به‌طور کلی می‌توان آلودگی را این‌گونه تعریف کرد: آلودگی آب عبارت است از وجود هر نوع ماده‌ای از قبیل گازها، ذرات معلق، مواد شیمیایی یا بیولوژیکی در آب، به‌طوری‌که مدت، شدت و حالت آن تأثیر نامطلوب بر سلامت موجودات زنده بگذارد و مانع استفاده مطلوب از آن گردد. به‌طور کلی آب سالم بدون بو، طعم و رنگ است. تغییر در هر یک از این پارامترها آلودگی آب را به همراه خواهد داشت. منابع ورود آلودگی به آب دو نوع می‌باشند: ۱- منابع نقطه‌ای، ۲- منابع غیرنقطه‌ای. منابع نقطه‌ای ورود آلودگی مانند ورود پساب تصفیه‌خانه‌های شهری و صنعتی و محل ریزش فاضلاب‌های سطحی به آب.

منابع غیرنقطه‌ای مانند ورود رواناب کشاورزی و یا نزولات آلوده جوی (باران‌های اسیدی) به آب.

در پژوهش حاضر نوع منبع واردکننده آلودگی به آب از نوع نقطه‌ای در نظر گرفته شد به‌عبارت دیگر یعنی که یک مقدار غلظت آلاینده مشخص به‌طور ناگهانی وارد آب می‌شود.

معادله یک‌بعدی انتقال: در این معادله دیفرانسیل جزئی یک‌بعدی که به‌صورت زیر است، فقط ترم انتقال[1] در نظر گرفته شده است.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

1- Advection

که در آن، c مقدار غلظت آلاینده در زمان t و مکان x بر حسب میلی‌گرم بر لیتر است و u متوسط سرعت جریان بر حسب متر بر ثانیه است.

معادله یک‌بعدی انتقال- پخش: در این معادله دیفرانسیل علاوه بر ترم انتقال، ترم پخش[1] نیز لحاظ شده است.

$$\frac{\partial \mathrm{c}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{c}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{D}_x \frac{\partial^2 \mathrm{c}}{\partial x^2}$$

که در آن، D_x ضریب پخش طولی نامیده می‌شود.

معادله دیفرانسیل زیر بیانگر معادله کامل پدیده انتقال است (۱۳):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \pm Sources/Sinks$$

که در آن، اثر چشمه و چاهک نیز لحاظ شده است، ولی در مقاله حاضر اثر آن را در نظر گرفته نمی‌شود.

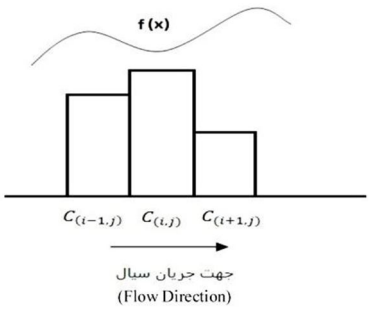
در ادامه به تشریح بعضی از روش‌های عددی موجود انتقال آلودگی و روش تحلیلی مورد استفاده در این پژوهش، پرداخته می‌شود.

روش‌های عددی: بررسی معادلات و روابط حاکم بر اکثر پدیده‌های طبیعی و مسائل مهندسی به معادلاتی ختم می‌شوند که قادرند رفتار یک فرایند طبیعی را شبیه‌سازی کنند، اکثر این معادلات که به آن‌ها معادلات حاکم بر پدیده طبیعی می‌گویند، معادلات با مشتقات جزئی هستند (۱). در بسیاری از موارد به‌دلیل دشواری و پیچیدگی معادلات، باید از حل عددی معادلات بهره جست. در واقع روش‌های عددی بر اساس گسسته کردن میدان محاسبات و مش‌بندی و شبکه‌بندی آن میدان، بسیار ساده‌تر از حل تحلیلی و مستقیم معادلات، می‌توانند پاسخ را ارائه دهند و همین سادگی و سرعت بالای پاسخ روش‌های عددی دلیل بر استفاده زیاد ازاین روش‌هاست. ابتدا به معرفی مختصر روش‌های عددی برای حل یک‌بعدی معادله انتقال پرداخته می‌شود.

روش لاکس (Lax Method): مطابق شکل ۱ تابع f (x)، تابع شکل یا تابع حالت در روش عددی نام دارد که در روش لاکس این تابع بین دو سلول مجاور خطی ($Y = Ax+B$) فرض می‌شود. پس این روش، تکنیکی بسیار ساده و سریع در محاسبه مقدار غلظت آلاینده در هر زمان و مکان دلخواه بعد از نقطه ورود آلودگی می‌باشد، چرا که تابع درجه یک است و این امر باعث کاهش زمان ران و اجرای برنامه می‌شود. برای شبیه‌سازی انتقال آلودگی به روش لاکس، به کمک برنامه MATLAB، کدنویسی انجام گرفت. رابطه لاکس که در این برنامه‌نویسی مورد استفاده قرار گرفت به‌صورت زیر می‌باشد:

```
C(i,j+1)=(B^2/2+B/2)*C(i-1,j)-
(B^2-1)*C(i,j)+(B^2/2-B/2)*C(i+1,j)
```

که در آن، $C(i,j)$ عبارتست از غلظت آلاینده در مکان i ام و زمان jام، هم‌چنین B بیانگر عدد کورانت می‌باشد.



شکل ۱- نمایش شماتیک فرایند انتقال آلودگی در یک طول گسسته شده در کانال.

Figure 1. The schematic pollutant transport process in the discrete length of the channel.

1- Dispersion

روش فروم (Fromm Method): با تعریفی مشابه آن‌چه در روش لاکس ذکرشد در روش فروم تغییرات غلظت آلودگی روی هر سلول موازی خط تغییر آلودگی بین دو سلول مجاور است. پس این روش هم، تکنیکی بسیار ساده و سریع در محاسبه مقدار غلظت آلاینده در هر زمان و مکان دلخواه بعد از نقطه ورود آلودگی می‌باشد، چرا که تابع بین‌سلولی خطی می‌باشد و این باعث کاهش زمان ران و اجرای برنامه می‌شود. برای شبیه‌سازی انتقال آلودگی به روش فروم، به کمک برنامه MATLAB، کدنویسی انجام گرفت. رابطه فروم که در این برنامه‌نویسی مورد استفاده قرار گرفت به‌صورت زیر می‌باشد:

C(i,j+1)=0.25(B^2-B)*C(i-2,j)*
+0.25(5*B-B^2)*C(i-1,j)+0.25*(4-B^*
*2-3*B)*C(i,j)+0.25*(B^2-B)*C(i+1,j)*

روش کوئیک (Quick Method): در روش کوئیک تغییرات غلظت آلودگی از تابع درجه دو به فرم $f(x)=Ax^2+Bx+C$ تبعیت می‌کند (۲). در این روش طبیعتاً به‌دلیل در نظر گرفتن یک تابع درجه دو و غیرخطی برای انتقال، زمان بیش‌تری برای ران نسبت به روش‌های فروم و لاکس خواهد داشت. ضمناً در این روش برای انتقال آلودگی در هر گام زمانی چهار سلول درگیر می‌شود.

فرم کلی روش کوئیک که در برنامه‌نویسی در این مقاله به‌کار گرفته شد به فرم زیر است:

*C(i,j+1)=(B^3/6-B/6)*C(i-2,j)+(B^3/-2+*
*B^2/2+B)*C(i-1,j)+(B^3/2-B^2-B/*
*2+1)*C(i,j)+(B^3/-6+B^2/2-B/3)*C(i+1,j)*

روش توابع شکل از مرتبه سوم و بیش‌تر (Shape Function-Order 3-4): روش فوق‌الذکر، شامل دو روش: تابع شکل درجه سه پسرو و تابع شکل درجه چهار می‌باشد که به‌ترتیب از توابع از مرتبه سه و چهار برای انتقال استفاده می‌کنند. بالتبع زمان ران این روش‌ها از تمامی روش‌های کوئیک، لاکس و فروم بیش‌تر است.

لازم به ذکر است که تابع شکل درجه سوم پسرو، برای انتقال در هر گام زمانی، پنج سلول و تابع شکل درجه چهار، شش سلول را درگیر می‌کند.

فرم کلی روش‌های فوق که در برنامه‌نویسی در نرم‌افزار MATLAB در این مقاله به‌کار گرفته شد به فرم زیر است که به‌ترتیب شامل درجه سه پسرو و تابع شکل درجه چهار می‌باشد:

C(i,j+1)=(B^4/24-B^3/12-B^2/24+B/12)
**C(i-3,j)+(B^3/2-B^4/6+B^2/6-B/2)*C(i-2,j)*
*+(B^4/4-B^3+B^2/4+1.5*B)*C(i-1,j)+*
*(B^3*0.84-B^4*0.17-B^2*0.84-B*0.84+1)*
**C(i,j)+(B^4/24-B^3/4+B^2*0.46-B/4)*
**C(i+1,j).*

*C(i,j+1)=(B^5/120-B^3/24+B/30)*C(i-3,j)*
*+(B^4/24-B^5/24+B^3*0.29-B^2/24-B/4)*
**C(i-2,j)+(B^5/12-B^4/6-B^3*0.58+B^2*
0.66+B)*C(i-1,j)+(B^4/4-B^5/12+B^3
*0.42-B^2*1.25-B/3+1)*C(i,j)+(B^5/*
*24-B^4/6-B^3/24+B^2*0.66-B/2)**
C(i+1,j)+(B^4/24-B^5/120-B^3/24-
*B^2/24+B/20)*C(i+2,j).*

تابع پیشنهادی جدید: تابع نمایی ساده (Simple Exponential Function): در این پژوهش تابع $Ae^x + Bx + C$ که تابع نمایی ساده نام دارد، برای انجام فرایند انتقال پیشنهاد شد. فرضیات در نظر گرفته شده عبارتند از:

$$C(i-2,j) = q$$
$$C(i-1,j) = m$$
$$C(i,j) = n$$
$$C(i+1,j) = p$$

همچنین در این مقاله دو پارامتر جدید به نام $l = \frac{\Delta x}{2}$ و $k = u\Delta t$ نیز معرفی شده است، پس می‌توان عدد کورانت را با پارامترهای جدید به‌صورت زیر معرفی کرد.

$$B = \frac{u * \Delta t}{\Delta x} = \frac{k}{2 * l}$$

برای انجام محاسبات در این قسمت، از نرم‌افزار MAPLE برای محاسبه انتگرال‌گیری‌های زیر استفاده شده است:

$$\int_{-3l}^{-l}(\mathrm{A}e^{x} + BX + C)dx = 2 \times m \times l$$

$$\int_{-l}^{l}(\mathrm{A}e^{x} + BX + C)dx = 2 \times n \times l$$

$$\int_{l}^{3l}(\mathrm{A}e^{x} + BX + C)dx = 2 \times p \times l$$

$$\mathrm{A} = -\frac{2l(m+p-2n)}{-3e^{-l}+e^{-3l}+3e^{l}-e^{3l}}$$

$$\mathrm{B} = \frac{-1}{2} \times \frac{-e^{-l}n + 2e^{-l}p - e^{-l}m + e^{-3l}n - e^{-3l}p - e^{l}n - e^{l}p + 2e^{l}m - e^{3l}m + e^{3l}n}{l(-3e^{-l} + e^{-3l} + 3e^{l} - e^{3l})}$$

$$C = \frac{-e^{-l}n - e^{-l}p - e^{-l}m + e^{l}n + e^{l}p + e^{l}m + e^{-3l}n - e^{3l}n}{-3e^{-l} + e^{-3l} + 3e^{l} - e^{3l}}$$

$$c_{out} = \int_{l-k}^{l}(\mathrm{A}e^{x} + BX + C)dx = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(-3e^{2l}+1+3e^{4l}-e^{6l})}((2nke^{k}l + 2pke^{k}l + nk^{2}e^{k} - pk^{2}e^{k} + 8l^{2}e^{4l}p + 16l^{2}ne^{4l+k} - 8l^{2}pe^{4l+k} - 8l^{2}me^{4l+k} - nk^{2}e^{4l+k} - pk^{2}e^{4l+k} + 2mk^{2}e^{4l+k} - nk^{2}e^{2l+k} + 2pk^{2}e^{2l+k} - mk^{2}e^{2l+k} - mk^{2}e^{6l+k} + nk^{2}e^{6l+k} + 8l^{2}e^{4l}m - 16l^{2}e^{4l}n + 6nlke^{4l+k} + 6plke^{4l+k} - 2nlke^{2l+k} - 8plke^{2l+k} - 2mlke^{2l+k} + 2mlke^{6l+k} - 6nlke^{6l+k})e^{-k})$$

$$c_{in} = \int_{-l-k}^{-l}(\mathrm{A}e^{x} + BX + C)dx = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(-3e^{2l}+1+3e^{4l}-e^{6l})}((2mke^{k}l + 2nke^{k}l + mk^{2}e^{k} - nk^{2}e^{k} + 8l^{2}e^{4l}n + 16l^{2}me^{4l+k} - 8l^{2}ne^{4l+k} - 8l^{2}qe^{4l+k} - mk^{2}e^{4l+k} - nk^{2}e^{4l+k} + 2qk^{2}e^{4l+k} - mk^{2}e^{2l+k} + 2nk^{2}e^{2l+k} - qk^{2}e^{2l+k} - qk^{2}e^{6l+k} + mk^{2}e^{6l+k} + 8l^{2}e^{4l}q - 16l^{2}e^{4l}m + 6mlke^{4l+k} + 6nlke^{4l+k} - 2mlke^{2l+k} - 8nlke^{2l+k} - 2qlke^{2l+k} + 2qlke^{6l+k} - 6mlke^{6l+k})e^{-k})$$

$$c(i,j+1) = \left(\frac{c_{in}-c_{out}+c(i,j)*\Delta x}{\Delta x}\right) = \left(\frac{c_{in}-c_{out}+2\times n\times l}{2l}\right)$$

به کمک نرم‌افزار MAPLE پاسخ انتگرال‌ها و معادلات دیفرانسیل و در نهایت به کمک معادله پیوستگی، مقدار غلظت مجهول به‌ازای هر مکان و زمان مشخص محاسبه شد و خروجی برنامه MAPLE که همان *C(i,j+1)* یعنی غلظت آلودگی در هر سلول i در زمان پیش روی $j+1$است، به‌عنوان ورودی برنامه MATLAB برای انجام فرایند انتقال آلودگی مورد استفاده قرار گرفت. به‌عنوان گام آخر در روش حل عددی معادله انتقال- پخش، از روش کرنک نیکلسون برای محسبه ترم پخش معادله انتقال- پخش یعنی میزان پخشیدگی آلودگی، در یک برنامه کامپیوتری در MATLAB استفاده شده است.

روش تحلیلی (Analytical Method): روش‌های تحلیلی برای حل معادلات انتقال- پخش معمولاً به حل مسائل ساده با ضرایب ثابت محدود می‌شود، علت این امر متغیر بودن پارامترهای سرعت و ضریب پخش طولی رژیم ناپایدار در جریان‌های رودخانه‌ای و همچنین پیچیدگی شرایط مرزی و اولیه است، البته روش‌های حل تحلیلی معدودی وجود دارند که می‌توانند معادلات انتقال- پخش را با پارامتر سرعت و ضریب پخش طولی متغیر حل کنند که بسیاری از این روش‌های حل به حدی پیچیده هستند که کاربردی نبوده و همچنین به‌علت شرایط مرزی و اولیه خاص بسیار محدود می‌شوند (۳). اما با توجه به همه این قیود هنوز هم روش‌های حل تحلیلی برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از حل عددی معادلات انتقال- پخش کاربرد دارند. در حقیقت روش‌های حل تحلیلی یک ابزار مطمئن و سریع برای ارزیابی صحت نتایج روش‌های عددی می‌باشد (۹).

حل تحلیلی معادله انتقال- پخش با ضریب پخش طولی و سرعت ثابت: حل تحلیلی معادله انتقال- پخش به‌صورت زیر تعریف می‌شود (۱۶):

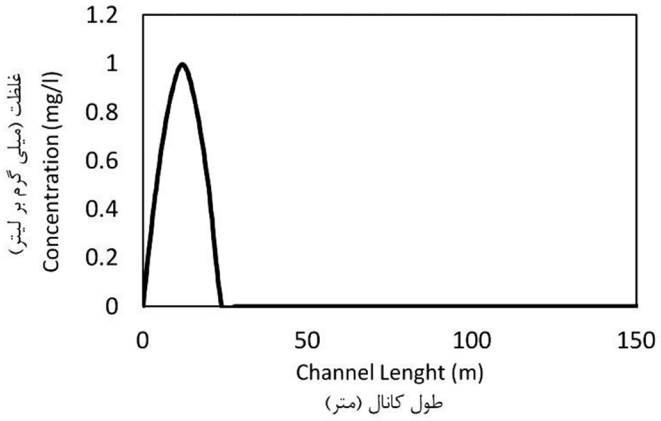
$$C(x,t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi t D_x}} \exp\left(-\frac{\left(x-(x_0+V_x t)\right)^2}{4D_x t}\right)$$

که در آن، $C(x,t)$ عبارتست از غلظت آلودگی در طول رودخانه در مکان و زمان های x و t، هم‌چنین A سطح مقطع کانال، V_x سرعت متوسط جریان و D_x ضریب پخش طولی آلودگی در رودخانه می‌باشد. هم‌چنین M در این رابطه جرم آلودگی بر حسب کیلوگرم است.

معیار همگرایی: معیار همگرایی روش‌های عددی لاکس، فروم، کوئیک و توابع حالت درجه سه و چهار، عدد کورانت کم‌تر از یک می باشد (۶). یکی از اهداف اصلی این پژوهش ارائه یک تابع انتقال است که اولاً به‌ازای عدد کورانت کم‌تر از یک، دارای جواب مشابه روش برتر عددی و روش تحلیلی باشد و ثانیاً به‌ازای عدد کورانت بیش‌تر از یک دارای جواب قابل‌قبول باشد و واگرا نشود.

نتیجه‌گیری و بحث

تعریف مسأله: مساله مطابق داده‌های زیر در نظر گرفته می‌شود. داده‌ها فرضی هستند اما طوری انتخاب شده‌اند که در محدوده داده‌های واقعی باشند. در یک کانال مستقیم جریان یکنواخت دائمی با سرعت ۶ متر بر ثانیه در جریان است. طول کانال ۵۰۰ متر می‌باشد و کانال به ۲۵۰ سلول ۲ متری تقسیم می‌گردد، گام زمانی ۰/۰۲۷ ثانیه و مساحت کانال یک مترمربع می‌باشد. آلودگی زنگوله‌ای نقطه‌ای به شکل زیر با ماکزیمم مقدار ۱ میلی‌گرم بر لیتر به کانال وارد می‌شود. حال هدف این است این آلودگی ورودی با روش‌های مختلف در طول کانال انتقال داده و با هم مقایسه شود.

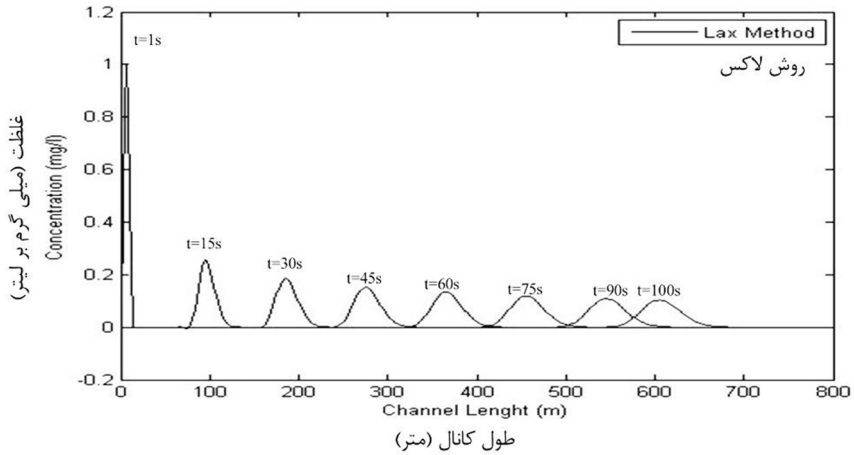


شکل ۲- آلودگی نقطه‌ای اولیه وارد شده به رودخانه.

Figure 2. The initial pollutant distribution in the channel.

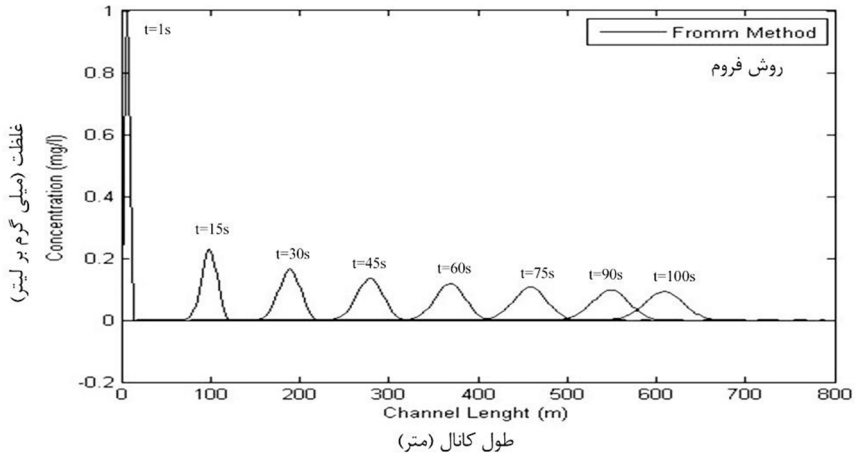
انتقال به‌وسیله روش‌های عددی: در این بخش مسأله فوق با تمامی روش‌های عددی ذکر شده بررسی می‌شود، سپس با صحت‌سنجی به‌وسیله روش تحلیلی، روش عددی برتر تعیین خواهد شد. برای این منظور برنامه کامپوتری تمامی روش‌ها نوشته شد و برای مقایسه نتایج با یکدیگر، نمودار خروجی‌ها و نتایج در بازه‌های زمانی ۱۵ ثانیه رسم شد. همچنین کل بازه زمانی برای انتقال آلودگی ۱۰۰ ثانیه در نظر گرفته شد.

ضمناً با توجه به داده‌های فوق عدد کورانت برابر ۰/۰۸۳۳ می‌باشد. شکل‌های ۳ تا ۷ نشانگر فرایند انتقال عددی با روش‌های عددی مذکور می‌باشد.



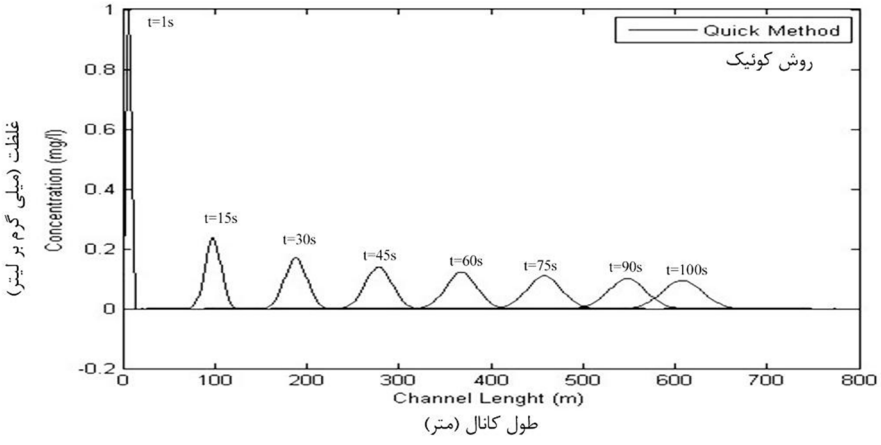
شکل ۳- انتقال آلودگی به روش لاکس.

Figure 3. The concentration of pollutant transport in the channel with the Lax method.



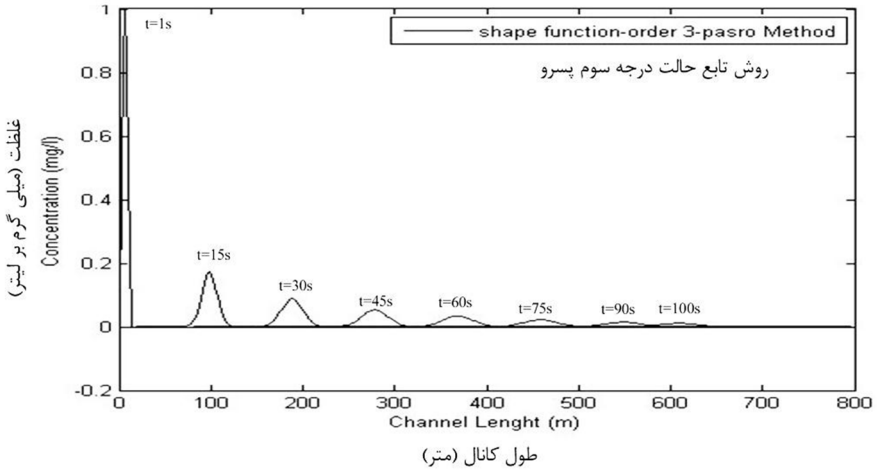
شکل ٤- انتقال آلودگی به روش فروم.

Figure 4. The concentration of pollutant transport in the channel with the Fromm method.



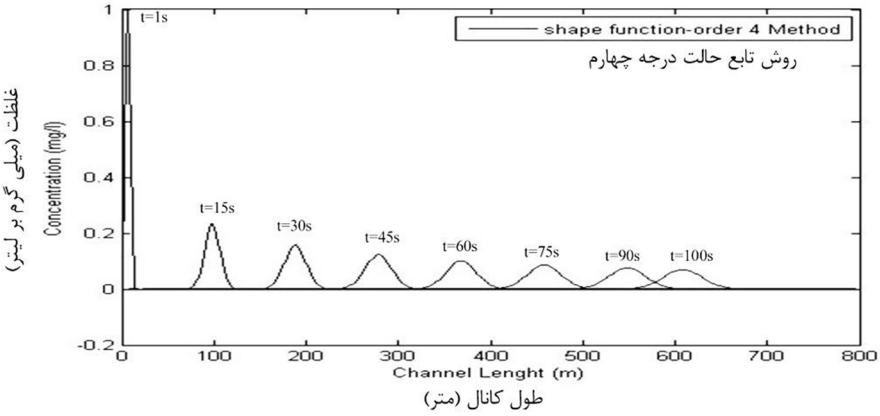
شکل ٥- انتقال آلودگی به روش کوئیک.

Figure 5. The concentration of pollutant transport in the channel with the Quick method.



شکل ٦- انتقال آلودگی به روش تابع حالت درجه سوم پسرو.

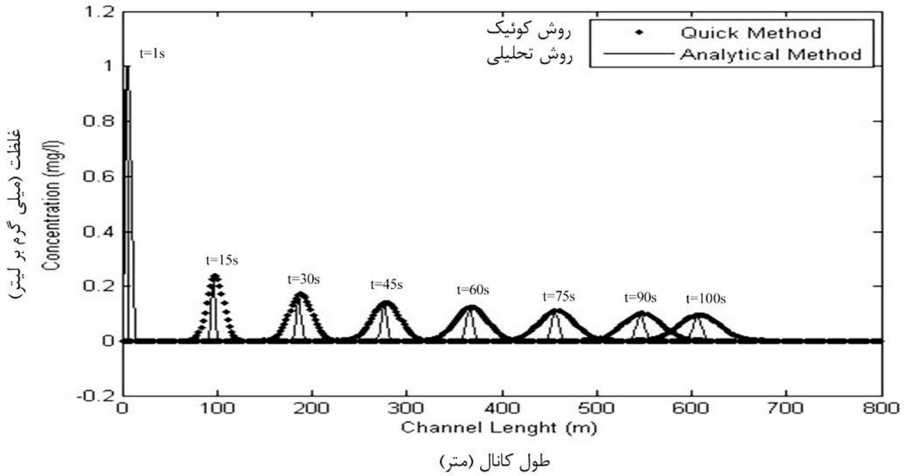
Figure 6. The concentration of pollutant transport in the channel with the Order 3-Pasro method.



شکل ۷- انتقال آلودگی به روش تابع حالت درجه چهارم.

Figure 7. The concentration of pollutant transport in the channel with the Order 4 method.

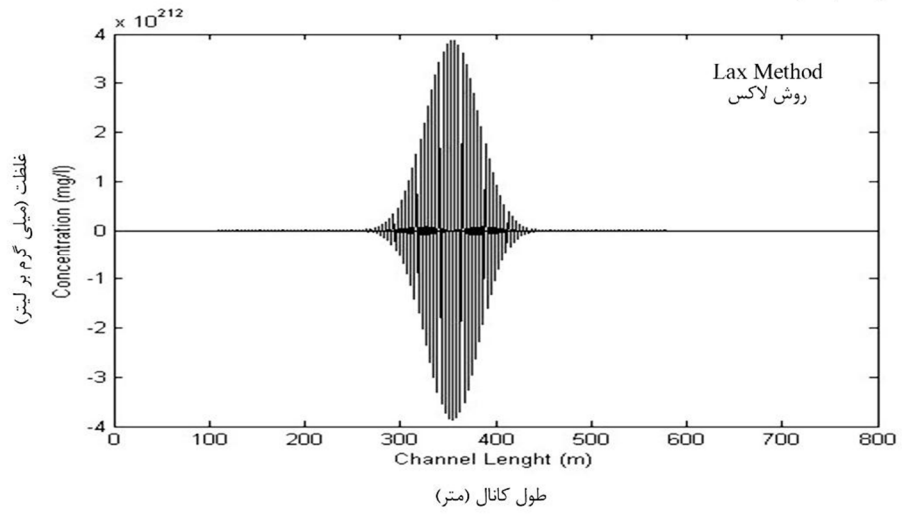
همان‌طور که در شکل‌های ۳ تا ۷ مشاهده می‌شود در تمامی روش‌های فوق بعد از گذشت ۱۵ ثانیه اول، پیک آلودگی به‌شدت کاهش می‌یابد و پس از آن در ۱۵ ثانیه‌های بعدی این افت پیک کم‌تر می‌باشد. همچنین نتایج روش لاکس، فروم، کوئیک و تابع حالت درجه چهارم با همدیگر تشابه زیادی دارند. حال مطابق پژوهش‌های مورد تأیید پیشین برای تعیین روش عددی برتر از بین روش‌های فوق‌الذکر، از روش حل تحلیلی معادله انتقال به‌عنوان معیار صحت‌سنجی استفاده می‌شود (۸). برای این منظور برنامه روش تحلیلی، مانند سایر روش‌های عددی فوق در برنامه MATLAB نوشته شد. مطابق شکل ۸ پس از بررسی‌های اولیه مشخص شد که روش کوئیک نسبت به سایر روش‌های عددی بیش‌ترین همبستگی و تشابه را با روش تحلیلی داراست. همان‌طور که در شکل ۸ دیده می‌شود در تمام نقاط پس از نقطه ورود آلودگی، پیک روش‌های کوئیک و تحلیلی بر هم منطبق هستند و این امر نمایانگر تشابه خوب این دو روش با یکدیگر است. به همین سبب روش عددی کوئیک از بین روش‌های عددی به‌عنوان روش بهتر، معرفی می‌گردد.



شکل ۸- مقایسه انتقال آلودگی با روش‌های تحلیلی و کوئیک.

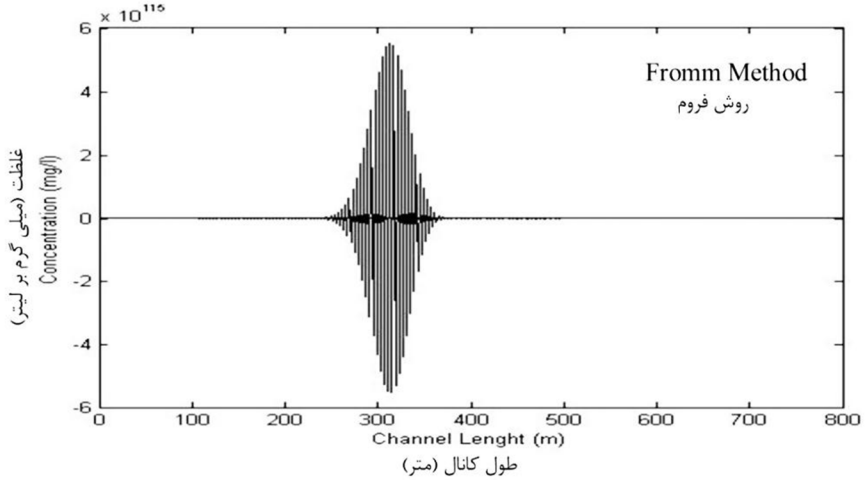
Figure 8. The comparison of Quick method with the analytical solution.

در اینجا بیان یک نکته دارای اهمیت است که اگر قرار باشد نتایج حاصل از یک مدل عددی با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شود، به‌دلیل برخی شرایط آزمایشگاهی و همچنین مقرون به صرفه شدن مطالعه آزمایشگاهی، بهتر است آزمایش‌ها در فواصل زمانی و یا مکانی بزرگ‌تر انجام شود یعنی به‌عبارتی بتوان با تعداد داده‌های خروجی آزمایشگاهی کم‌تر و در فواصل زمانی بزرگ‌تر، مدل عددی را صحت‌سنجی کرد. لازمه این مهم این است که مدل عددی نیز در شرایط مش‌بندی بزرگ، همگرا شود و دارای جواب باشد. به همین دلیل بزرگ بودن دامنه همگرایی یک روش عددی، یک ملاک مهم برای ارزیابی جامع بودن آن مدل عددی می‌باشد. حال اگر در مسأله فرضی بیان شده، گام زمانی به‌جای ۰/۰۲۷ ثانیه، ۰/۵ ثانیه فرض شود، مقدار عدد کورانت برابر ۱/۵ خواهد شد. شکل ۹ تا ۱۳ نمایانگر فرایند انتقال آلودگی با روش‌های عددی بیان شده با عدد کورانت ۱/۵ می‌باشد.



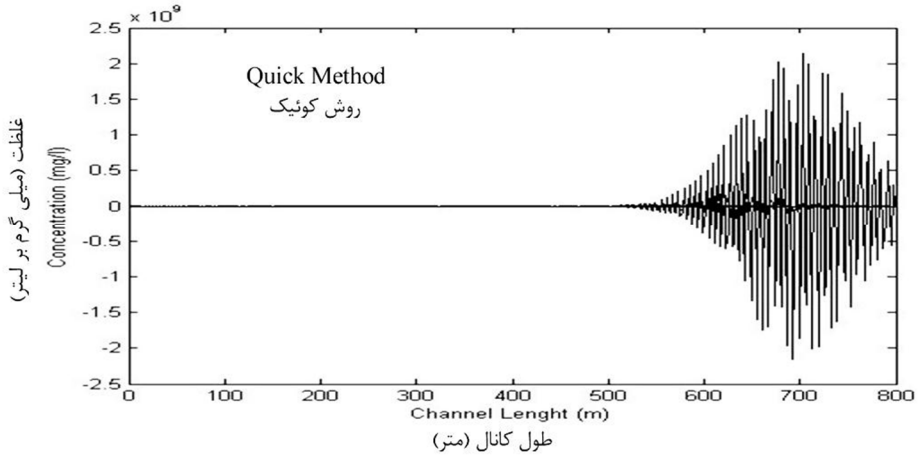
شکل ۹- انتقال آلودگی به روش لاکس با عدد کورانت ۱/۵.

Figure 9. The concentration of pollutant transport in the channel with the Lax method (B=1.5).



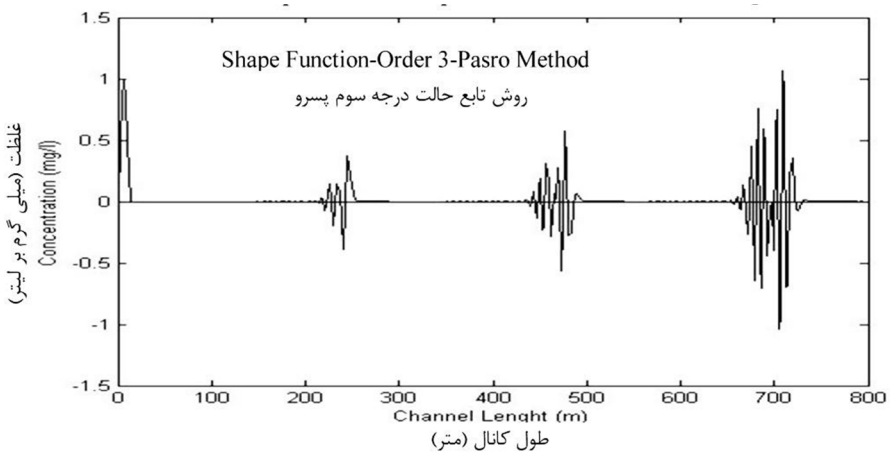
شکل ۱۰- انتقال آلودگی به روش فروم با عدد کورانت ۱/۵.

Figure 10. The concentration of pollutant transport in the channel with the Fromm method (B=1.5).



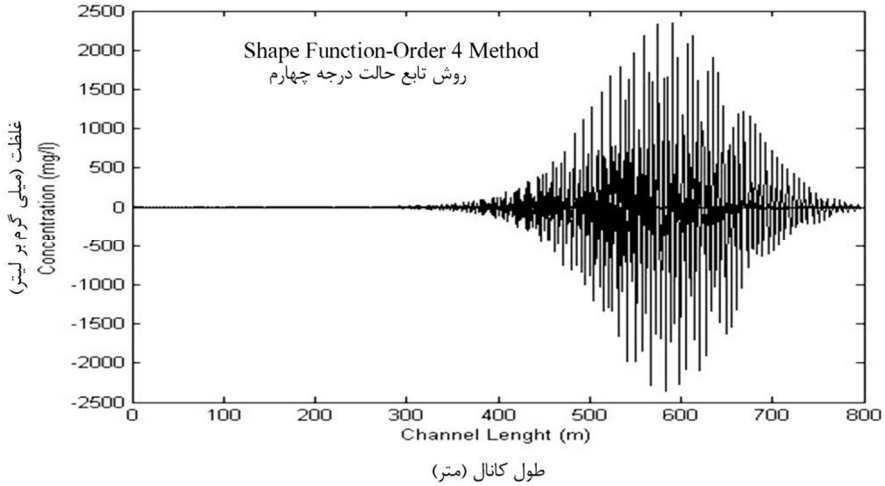
شکل ۱۱- انتقال آلودگی به روش کوئیک با عدد کورانت ۱/۵.

Figure 11. The concentration of pollutant transport in the channel with the Quick method (B=1.5).



شکل ۱۲- انتقال آلودگی به روش تابع حالت درجه سوم پسرو با عدد کورانت ۱/۵.

Figure 12. The concentration of pollutant transport in the channel with the Order 3-pasro method (B=1.5).



شکل ۱۳- انتقال آلودگی به روش تابع حالت درجه چهارم با عدد کورانت ۱/۵.

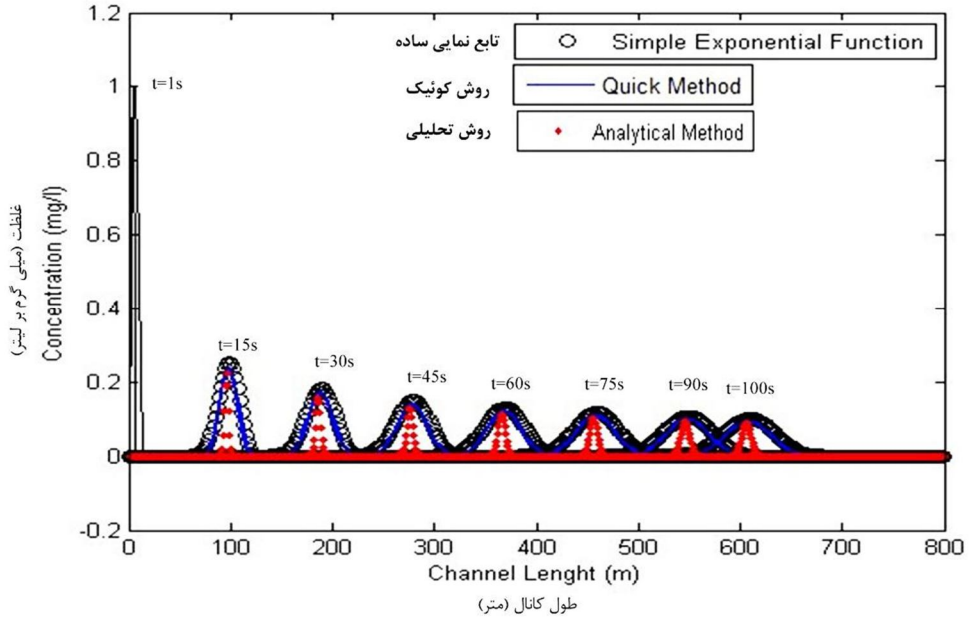
Figure 13. The concentration of pollutant transport in the channel with the Order 4 method (B=1.5).

همان‌طور که ملاحظه می‌شود همه روش‌های عددی موجود مذکور، برای عدد کورانت بالاتر از ۱ دارای جواب نیستند و واگرا می‌شوند. پس برای رفع این مشکل باید تابعی پیشنهاد شود که: اولاً به‌ازای عدد کورانت کم‌تر از یک، جوابی مشابه روش کوئیک (به‌عنوان روش عددی برتر) داشته باشد و ثانیاً به‌ازای عدد کورانت بیش‌تر از یک نیز دارای جواب و همگرا باشد. در صورت وجود چنین تابعی که این دو شرط را به‌طور هم‌زمان داشته باشد، می‌توان ادعا کرد که آن تابع از روش عددی کوئیک نیز عملکرد بهتری دارد.

برای این منظور، پس از تحلیل و بررسی‌های بسیار، تابع نمایی ساده به فرم $Ae^x + Bx + C$ پیشنهاد شد. برای استفاده ازاین تابع برای انجام فرایند انتقال آلودگی، ابتدا مقدار غلظت خروجی (C_{out}) و غلظت ورودی (C_{in}) به هر سلول توسط این تابع، با انتگرال‌گیری به کمک روابط یادشده فوق در نرم‌افزار MAPLE محاسبه شد و سپس ضابطه کلی و نهایی این تابع $C(i,j+1)$، به‌دست آمد و به کمک نرم‌افزار MATLAB و داشتن ضابطه تابع، پروسه انتقال انجام گرفت.

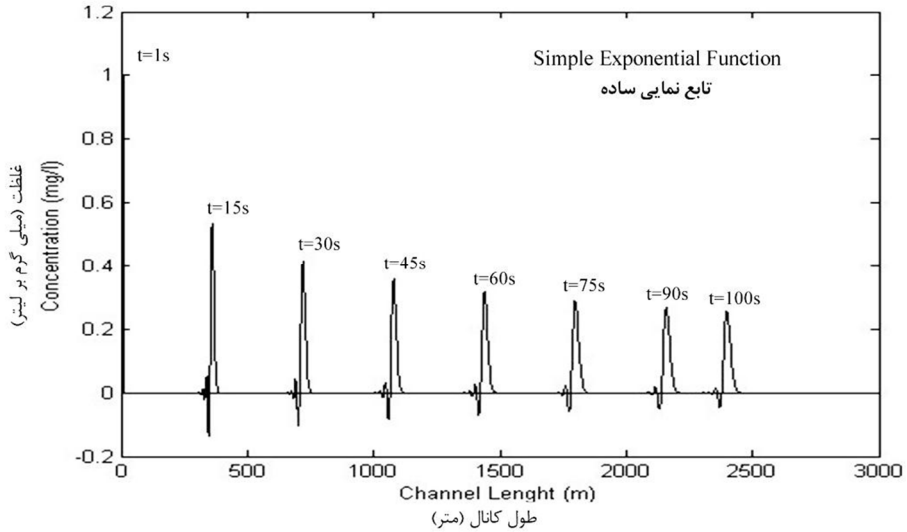
شکل ۱۴ نشانگر انتقال آلودگی مسأله فرضی مذکور، توسط تابع نمایی ساده و مقایسه آن با روش تحلیلی و کوئیک به‌ازای عدد کورانت ۰/۰۸۳۳ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج تابع نمایی ساده دقیقاً بر روش تحلیلی و کوئیک منطبق است. پس تابع نمایی ساده شرط اول مبنی بر تطابق با نتایج روش کوئیک را داراست. حال باید عملکرد این تابع را به‌ازای اعداد کورانت بیش‌تر از یک، مورد بررسی قرار داد.

شکل ۱۵ نشانگر انتقال آلودگی مسأله فرضی مذکور، توسط تابع نمایی ساده به‌ازای عدد کورانت ۱/۵ می‌باشد. با توجه به شکل ۱۵مشاهده می‌شود که خوشبختانه تابع نمایی ساده پیشنهاد شده، به‌ازای عدد کورانت بیش‌تر از یک نیز دارای جواب است و واگرا نمی‌شود. پس تابع نمایی ساده، به‌دلیل این‌که هر دو شرط فوق شامل تطابق به روش کوئیک به‌ازای عدد کورانت کم‌تر از یک و همگرا شدن جواب‌ها به‌ازای عدد کورانت بیش‌تر از یک را داراست، بنابراین می‌توان ادعا کرد که تابع نمایی ساده عملکرد بهتری نسبت به روش کوئیک دارد. بنابراین مشکل موجود در این پژوهش که واگرا شدن خروجی‌ها و نتایج روش‌های عددی برای اعداد کورانت بیش‌تر از یک بود، به کمک تابع نمایی ساده رفع گردید.



شکل ١٤- انتقال آلودگی به روش تابع نمایی ساده و مقایسه آن با روش‌های تحلیلی و کوئیک به‌ازای عدد کورانت ۰/۰۸۳۳.

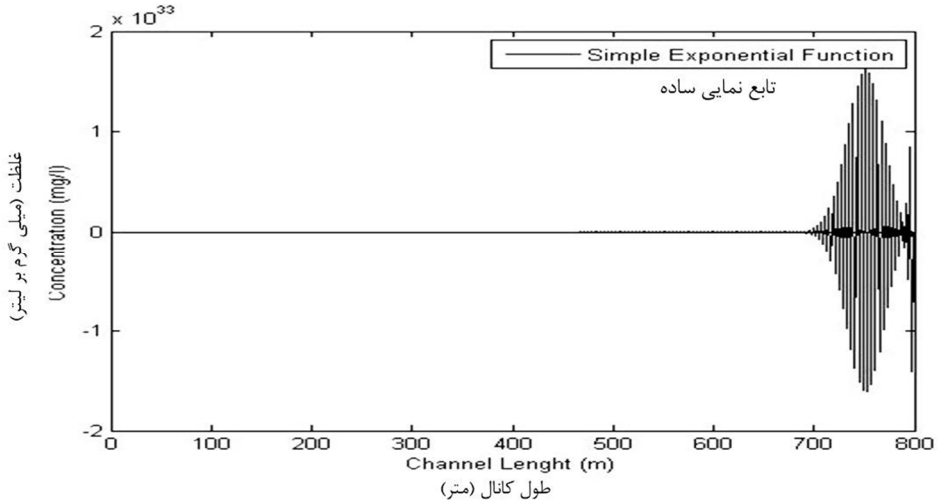
Figure 14. The comparison of simple exponential function with the analytical solution and Quick method (B=0.0833).



شکل ١٥- انتقال آلودگی به روش تابع نمایی ساده به‌ازای عدد کورانت ۱/۵.

Figure 15. The concentration of pollutant transport in the channel with the simple exponential function (B=1.5).

بنابراین در تابع نمایی ساده، علاوه بر دقت بالای آن به‌ازای اعداد کورانت کم‌تر از یک و تطابق خوب آن با حل تحلیلی، شرط همگرایی این تابع نیز، با یک واحد پیشرفت نسبت به سایر روش‌های موجود عددی، عدد کورانت کم‌تر مساوی ۲ محاسبه شد که نتیجه بسیار خوبی می‌باشد.



شکل ۱۶- انتقال آلودگی به روش تابع نمایی ساده به‌ازای عدد کورانت ۲/۱.

Figure 16. The concentration of pollutant transport in the channel with the simple exponential function (B=2.1).

شکل ۱۶ نشانگر انتقال آلودگی با کمک تابع نمایی ساده به‌ازای عدد کورانت ۲/۱ می‌باشد. همان‌طور که بیان شد، مشاهده می‌شود پاسخ این تابع به‌ازای عدد کورانت بیش از ۲ واگرا شده است.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش روش‌های عددی و تحلیلی انتقال آلودگی مورد مطالعه قرار گرفت و نقاط ضعف و قوت هر یک ازین روش‌ها بیان شد. برای مقایسه این روش‌ها یک مسأله فرضی که مقدار پارامترهای آن در رنج داده‌های واقعی بودند، مطرح شد. برای تعیین روش عددی برتر، از روش حل تحلیلی معادله انتقال- پخش، به‌عنوان معیار صحت‌سنجی استفاده شد. نتایج نشان داد که روش عددی کوئیک نسبت به سایر روش‌های عددی مورد بحث شامل لاکس، فروم، تابع حالت درجه سه و چهار، تطابق بهتری با روش تحلیلی دارد، پس به‌عنوان روش برتر عددی انتخاب شد. اما تمامی این روش‌های عددی موجود، از جمله روش کوئیک، دارای یک ضعف در معیار همگرایی بودند و آن این‌که معیار همگرایی این روش‌ها عدد کورانت کم‌تر از یک است و به‌ازای عدد کورانت بیش‌تر از یک دارای جواب‌های حقیقی نبوده و واگرا می‌شوند. وجود این مشکل باعث شد تا ایده طرح یک تابع حالت جدید به‌عنوان تابع انتقال، ایجاد شود. تابعی که بتواند اولاً به‌ازای عدد کورانت کم‌تر از یک، جوابی مشابه روش کوئیک (به‌عنوان روش عددی برتر) داشته باشد و ثانیاً به‌ازای عدد کورانت بیش‌تر از یک نیز دارای جواب‌های حقیقی و همگرا باشد. پس از بررسی‌های بسیار، تابع نمایی ساده به‌عنوان یک تابع انتقال آلودگی جدید، پیشنهاد شد و توانست هر دو شرط مذکور را به‌صورت هم‌زمان ارضا کند. بنابراین این تابع، به‌عنوان تابع انتقال برتر معرفی شد.

منابع

1.Abbot, M.B., and Basco, D.R. 1997. Computational Fluid Dynamics: An Introduction for Engineers. Longman Singapore Publisher (Pte) Ltd, 425p.
2.Ardestani, M., Sabahi, M.S., and Montazeri, H. 2015. Finite Analytic Methods for Simulation of Advection- Dominated and Pure Advection Solute Transport With Reaction in Porous Media. Int. J. Environ. Res. 9: 1. 197-204.
3.Barry, D.A., and Sposito, G. 1989. Analytical solution to a convection-dispersion model timedependent transport coefficients. Water Resour Research. 25: 12. 2407-2416.
4.Falconer, R.A., and Liu, S. 1988. Modeling solute transport using quick scheme. J. Environ. Engin. ASCE. 114: 1. 22160.
5.Glass, J., and Rodi, W. 1982. A higher order numerical scheme for scalar transport. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 31: 337-358.
6.Hoffmann, K.A., and Chiang, S.T. 2000. Computational Fluid Dynamics. A Publication of Engineering System, Wichita, Kansas, 67208-1078, USA, 208p.
7.Kamphuis, J.W. 1991. Physical Modeling. I in Handbook of Coastal and Ocean Engineering . Vol2, Gulf Publishing Company, Houston Texas.
8.Kim, K.C., Park, G.H., Jung, S.H., Lee, J.L., and Suh, K.S. 2011. Analysis on the characteristics of a pollutant dispersion in river environment. Annals of Nuclear Energy. 38: 232-237.
9.Kumar, A., Jaiswal, D., and Kumar, N. 2009. Analytical solutions of one-dimensional advection-disperion equation with variable coefficients in a fnite domain. J. Earth Syst. Sci. 118: 5. 539-549.
10.Li, S., and Duffy, C.J. 2012. Fully-coupled modeling of shallow water flow and pollutant transport on unstructured grids. Environmental Sciences. 13: 2098-2121.
11.Schmalle, G.F., and Rehmann, C.R. 2014 Analytical solution of a model of contaminant transport in the advective zone of a river. J. Hydraul. Eng. ASCE 7900.0000885. (1-8).
12.Singh, P., Yadav, S.K., and Kumar, N. 2012. One-Dimensional pollutant's advective-diffusive transport from a varying pulse-type point source through a medium of linear heterogeneity. J. Hydrol. Engin. 17: 9. 1047-1052.
13.Van Genuchten, M.Th., and Alves, W.J. 1982. Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation. U.S. Department of Agriculture. Technical Bulletin. No. 1661. 151.
14.Yadav, R.R., Jaiswal, D.K., and Yadav, H.K. 2010. Analytical solution of one dimensional temporally dependent advection-dispersion equation in homogeneous porous media. Inter. J. Engin. Sci. Technol. 2: 141-148.
15.Yoshioka, H., and Unami, K. 2013. A cell-vertex finite volume scheme for solute transport equations in open channel networks. Probabilist. Eng. Mech. 31: 30-38.
16.Zheng, N.S. 1996. Mathematical Modeling of Groundwater pollution, Springer.
17.Zoppou, C., and Knight, J.H. 1997. Analytical solution for advection and advection-dispersion equation with spatially variable coefficient. J. Hydr. Engin. 123: 2. 144-148.

Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources

J. of Water and Soil Conservation, Vol. 23(2), 2016
http://jwsc.gau.ac.ir

Water quality prediction in one-dimensional flow by means of new advective transport function and convergence criteria modification

***S.A. Hashemi Monfared[1], M. Dehghani Darmian[2], B. Pirzadeh[1] and M. Azhdary Moghaddam[3]**

[1]Assistant Prof., Dept. of Civil Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan,
[2]Ph.D. Student, Dept. of Civil Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan,
[3]Associate Prof., Dept. of Civil Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan
Received: 06/14/2015; Accepted: 10/13/2015

Abstract

Background and Objectives: According to the low rainfall and the water resources in the country, investigation of the pollution behavior in water is very important. To Study on this phenomena, advection-diffusion equation in one-dimensional flow is used. Analytical solution and numerical solutions can be used to solve this equation. The residual of numerical methods are decreased using computer simulation in recent years. Some researcher investigated a higher order numerical scheme for scalar transport. The computational principles of a numerical scheme for the solution of the two-dimensional scalar transport equation were presented in their study. They evaluated their model applicability in several examples involving tracer releases in to channel flows. Some authors investigated on the modeling of solute transport using quick scheme. The scheme is shown to yield high accuracy in comparison with the more conventional second-order central-difference representation. A specified pollutant transport simulated in the river environments and compared with the numerical solutions. Hoffmann and Chiang as a part of their book entitled Computational Fluid Dynamics, discussed on the convergence constraints of the different numerical methods of pollution transport. He concluded that the maximum amount of this constraint is the state that the courant number is between 0 and 1. The objective of this research is to introduce the transport function that by maintaining positive characteristics of previous methods, modify existing divergence constraints.

Materials and Methods: In this paper a hypothetical case study with data in the real range is selected and is solved with different numerical approaches like Lax, Fromm, Quick and etc. The analytical solution is chosen for the verification. The MAPLE software was used to do the computation of the new proposed advective transport function (Simple Exponential Function).

Results: The results showed that the Quick method is shown the best agreement with the analytical solution and also the numerical solutions converge only when the courant number is less than 1. This makes constraints for the solution, time and distance interval selection. A new Simple exponential function in one dimensional pollutant transport of shallow water is proposed to eliminate this constraint. The calculated values of this new proposed function is in good agreement with the analytical and Quick method and also the courant number can be increase to 2 with the application of this function.

Conclusions: The new advective transport function entitled simple exponential function that proposed and presented in this investigation, is a suitable function for pollutant transport. This new function is in good agreement with the analytical method and Quick scheme and also the courant number could increase up to 2 with the application of this function.

Keywords: Advection-diffusion equation, Numerical methods, Analytical method, Quick method, Simple exponential function

* Corresponding Author; Email: hashemi@eng.usb.ac.ir